Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

119817

Herausgegeben

von

L. Fuchs.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 124.

In vier Heften.

Berlin,
W. 35 Lützowstrasse 107/8.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1902.

Inhaltsverzeichniss des Bandes 124.

Seite

Farkas, J. Theorie der einfachen Ungleichungen . . . . . 1— 27

Fields, J. C. The *Riemann-Roch* Theorem and the Independence of the Conditions of Adjointness in the case of a curve for which the tangents at the multiple points are distinct from one another . . . . . 179—201

Fischer, V. Eine Anwendung der Quaternionentheorie auf die thermodynamischen Gleichungen . . . . . 93—101

Fuchs, L. Ueber Grenzen, innerhalb deren gewisse bestimmte Integrale vorgeschriebene Vorzeichen behalten . . . . . 278—291

Goebel, J. B. Die Vertheilung der Electricität auf zwei leitenden Kugeln. 157—164

Grünfeld, E. Beiträge zur Theorie der einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung adjungirten Differentialgleichungen . . . . . 134—142

Gundelfinger, S. Drei Briefe *Aronholds* an *Hesse* . . . . . 59— 79

— — Briefentwurf von *Hesse* an *Aronhold* . . . . . 80— 82

— — Ueber die muthmassliche Entstehung der Sätze *Aronholds* über die Invariante S und eine damit zusammenhängende neue Begründung der Theorie der ternären kubischen Formen . . . . . 83— 86

— — Zur Berechnung der *Gauss*schen Logarithmen für kleine Werthe von B resp. zugehörige Werthe von A . . . . . 87— 92

Hamburger, M. Ueber die Umformung von geschlossenen Integralen . . 28— 37

Hoyer. Ueber Definition und Behandlung transitiver Gruppen . . . . . 102—114

Kokott, P. Untersuchungen über die *Landen*sche Transformation . . . . 165—178

Königsberger, L. Die Principien der Mechanik für mehrere unabhängige Variable . . . . . 202—277

Kühne, H. Eine Wechselbeziehung zwischen Functionen mehrerer Unbestimmten, die zu Reciprocitätsgesetzen führt . . . . . 121—133

Seite

Landau, E. Ein Satz über die Zerlegung homogener linearer Differentialausdrücke in irreducible Factoren . . . . . 115—120

Lemke, H. Ueber das Gleichgewicht kosmischer Gasmassen . . . . . 143—151

Schlesinger, L. Ueber das *Gauss*sche Pentagramma mirificum . . . . 38— 46

— — Ueber einen allgemeinen Satz aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen . . . . . 47— 58

— — Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen im Anschlusse an das *Riemann*sche Problem . . . . . 292—319

Thomé, L. W. Ueber asymptotische Darstellungen von Functionen . . . 152—156

Theorie der einfachen Ungleichungen.

(Von Herrn *Julius Farkas* in Kolozsvár (Klausenburg).)

Die naturgemässe und zugleich systematische Behandlung der analytischen Mechanik muss das zuerst von *Fourier**) und dann später von *Gauss***) formulirte Ungleichheitsprincip der virtuellen Verschiebungen zur Grundlage haben.

Die Möglichkeit einer solchen Behandlung erfordert aber gewisse Kenntnisse über die homogenen linearen ganzen Ungleichungen, welche bisher so zu sagen gänzlich gefehlt haben.

Fourier hat sich selbst vielfach um Ungleichungen bemüht***), aber ohne erheblichen Erfolg. Später befasste sich der russische Mathematiker *Ostrogradsky* mit diesem Gegenstande.†) Seine Betrachtungen passen aber nur auf den Fall, dass die Anzahl der Ungleichungen, welche zum Ausdrucke des mechanischen Zwanges dienen, diejenige der Componenten der virtuellen Verschiebungen nicht übertrifft. Andere Publicationen, welche über dieses Thema noch erschienen sind, zeigen auch keinen wesentlichen Fortschritt.

---

*) „Sur la Statique". I. de l'Éc. polyt. II. An VI. (1798). Oeuvres, Tome II. pp. 477—521. 1890.

**) „Ueber ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik". Dieses Journal, IV. 1829. Werke V. 1877.

„Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii". Comm. soc. reg. scient. Gotting. rec. Vol. VII. 1830. Werke V. 1877.

***) Oeuvres, Tome II. pp. 317—328. 1890. (1823, 1824).

†) „Considérations générales sur les momens des forces". Mém. de l'Ac. imp. des Sc. de St. Pétersbourg 1834.

Während der letzten sieben Jahre habe ich mich wiederholt mit Ungleichungen beschäftigt und aus dem Gesichtspunkte der Anwendungen eine vorläufig abgeschlossene Theorie derselben zu Stande gebracht. Meine vereinzelt erschienenen Publicationen*) sind aber nicht geeignet, ein klares und zusammenhängendes Bild des Ganzen zu liefern, und davon abgesehen, ist ihre Zugänglichkeit auch beschränkt. Darum nehme ich mir die Freiheit, hier eine systematische Darstellung, nebst einigen Ergänzungen, dieser Arbeiten vorzulegen. Ich habe die Absicht, in einer späteren Abhandlung die Verallgemeinerung der Anwendungen zu behandeln.

I. Definitionen.

Eine homogene lineare ganze Function nenne ich kurz einfache Function. Ist Θ eine einfache Function der reellen Variablen $u_1, u_2, \ldots, u_n$, so nenne ich die Gleichung $\Theta = 0$ eine einfache Gleichung, und die Ungleichung $\Theta \geqq 0$ oder $-\Theta \leqq 0$ eine einfache Ungleichung, jede eine einfache Relation zwischen den Variablen u. Die einfachen Ungleichungen werde ich immer in der Form $\Theta \geqq 0$ schreiben und betrachten.

Sind $\Theta'_1, \Theta'_2, \ldots, \Theta_1, \Theta_2, \ldots$ einfache Functionen der Variablen u, und wird der Werthbereich dieser Variablen durch die einfachen Relationen

$$\Theta'_1 = 0, \qquad \Theta'_2 = 0, \ldots, \qquad \Theta_1 \geqq 0, \qquad \Theta_2 \geqq 0, \ldots$$

eingeschränkt, so nenne ich die Gesammtheit dieser Relationen ein einfaches Relationssystem. Werthsysteme u, welche diesem Relationssystem genügen, nenne ich Lösungen desselben.

Besteht für alle Lösungen eines einfachen Relationssystems die einfache Gleichung $\Theta' = 0$, so nenne ich dieselbe eine consecutive Gleichung des Systems. Besteht für alle Lösungen eines einfachen Relationssystems die einfache Ungleichung $\Theta \geqq 0$, so nenne ich dieselbe eine consecutive Ungleichung des Systems. Ich nenne die Gleichung $\Theta' = 0$ und die Ungleichung $\Theta \geqq 0$ eine consecutive Relation des Systems. Es ist klar, dass eine jede Relation, welche in einem einfachen Relationssysteme vorkommt,

---

*) „Ueber die Anwendungen des mechanischen Princips von *Fourier*“. Math. und Naturw. Berichte aus Ungarn XII. 1895.

„Die algebraischen Grundlagen der Anwendungen des *Fourier*schen Princips in der Mechanik“. Ebenda XV. 1898.

„Die algebraische Grundlage der Anwendungen des mechanischen Princips von *Fourier*“. Ebenda XVI. 1899.

„Allgemeine Principien für die Mechanik des Aethers“. Archives Néerlandaises, Série II. T. IV. (Jubelband, H. A. Lorentz.)

eine consecutive Relation des Systems ist. Von einer jeden Relation, welche in einem einfachen Relationssysteme vorkommt, sage ich, dass dieselbe explicite in dem Systeme enthalten ist. Von den übrigen consecutiven Relationen sage ich, dass dieselben implicite in dem Systeme enthalten sind.

Ist ein gegebenes Relationssystem so beschaffen, dass, sobald eine Relation aus demselben entnommen wird, durch das System der zurückgebliebenen Relationen der Werthbereich der Variablen nicht mehr in solchem Maasse eingeschränkt wird, wie durch das ganze System, so sage ich von den gegebenen Relationen, dass dieselben unabhängig von einander sind; und ihr System, d. h. das ganze gegebene System nenne ich dann ein ***Stammsystem.***

II. Ueber die mögliche Anzahl der von einander unabhängigen einfachen Ungleichungen.

Sobald die Anzahl der Variablen zwei übertrifft, ist die mögliche Anzahl der in einem Stammsystem explicite enthaltenen Ungleichungen unbegrenzt. Es ist offenbar genügend, den Beweis für den Fall von drei Variablen zu führen.

Diese drei Variablen x, y, z sollen die geradlinigen, rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes bedeuten, welcher seinerseits nicht ausserhalb des Raumes einer gewöhnlichen Pyramide fallen soll, d. h. einer solchen, welche keine Hohlwinkel aufweist. Die Seiten der Pyramide erstrecken sich in die Unendlichkeit. In den Ungleichungen

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \geqq 0, \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \geqq 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

sollen die Coefficienten α, β, γ die Richtungscosinus der nach dem Inneren der Pyramide gerichteten Normalen der Seitenflächen bedeuten, und die Spitze der Pyramide soll sich im Anfangspunkte des Coordinatensystems befinden. Durch das System (*) wird in diesem Falle die Verfügung über den Ort des Punktes x, y, z ausgedrückt. Wie viel Seiten auch die Pyramide habe, also aus wie vielen Ungleichungen auch das System (*) bestehe, eine jede Ungleichung ist unabhängig von dem Systeme der anderen, weil, sobald eine Ungleichung beseitigt wird, hiermit auch eine Seitenfläche der Pyramide beseitigt wird, und der Rauminhalt derselben vermehrt sich dadurch um denjenigen einer dreiseitigen Pyramide, folglich gewinnt der Ort des

Punktes an Freiheit, und der Bereich der Auflösungen des Systems vergrössert sich.

Nur ***wenn die Anzahl der Variablen nicht zwei übertrifft, ist der Umfang der Stammsysteme beschränkt. In dem Falle von zwei Variablen kann ein Stammsystem höchstens vier Ungleichungen explicite enthalten,*** und enthält es deren vier, so kann es immer auf zwei Gleichungen reducirt werden; enthält es drei Ungleichungen, so kann es immer auf eine Gleichung und auf eine Ungleichung zurückgeführt werden. Man überzeugt sich davon leicht durch eine geometrische Anschauung, indem man die zwei Variablen als Coordinaten eines Punktes in einer Ebene betrachtet und die Coefficienten paarweise als Richtungscosinus von Strahlen auffasst, deren Mittelpunkt sich in dem Anfangspunkte der Coordinaten befindet.

III. Ueber die Superposition von Lösungen.

1. Es sei

$$(1.)\quad \left\{\begin{array}{l} A'_{11}u_1 + A'_{12}u_2 + \cdots + A'_{1n}u_n = 0,\\ A'_{21}u_1 + A'_{22}u_2 + \cdots + A'_{2n}u_n = 0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ A'_{l1}u_1 + A'_{l2}u_2 + \cdots + A'_{ln}u_n = 0,\\ A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + \cdots + A_{1n}u_n \gtreqless 0,\\ A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + \cdots + A_{2n}u_n \gtreqless 0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

unser System von einfachen Relationen. ***Genügen diesem Systeme die Werthe***

$$\begin{array}{llll} u_1 = a_1, & u_2 = a_2, & \ldots, & u_n = a_n;\\ u_1 = b_1, & u_2 = b_2, & \ldots, & u_n = b_n;\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & \end{array}$$

so genügen demselben auch die Werthe

$$\begin{array}{l} u_1 = a_1 + b_1 + \cdots,\\ u_2 = a_2 + b_2 + \cdots,\\ \cdots\cdots\cdots\\ u_n = a_n + b_n + \cdots; \end{array}$$

denn aus

$$\begin{array}{l} A'_{i1}a_1 + A'_{i2}a_2 + \cdots + A'_{in}a_n = 0,\\ A'_{i1}b_1 + A'_{i2}b_2 + \cdots + A'_{in}b_n = 0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

$$A_{k1}a_1 + A_{k2}a_2 + \cdots + A_{kn}a_n \geqq 0,$$
$$A_{k1}b_1 + A_{k2}b_2 + \cdots + A_{kn}b_n \geqq 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

folgt offenbar

$$A'_{i1}(a_1 + b_1 + \cdots) + A'_{i2}(a_2 + b_2 + \cdots) + \cdots + A'_{in}(a_n + b_n + \cdots) = 0,$$
$$A_{k1}(a_1 + b_1 + \cdots) + A_{k2}(a_2 + b_2 + \cdots) + \cdots + A_{kn}(a_n + b_n + \cdots) \geqq 0.$$

2. Es mögen $p_1, p_2, \ldots$ einfache Functionen der Variablen u bedeuten und diese Variablen ausser dem Systeme (1.), noch dem Systeme

(2.) $$p_1 \geqq 0, \quad p_2 \geqq 0, \ldots$$

unterworfen sein; ***wenn nun keine Function p in dem vereinigten Systeme*** (1.) ***und*** (2.) ***in der Weise beschränkt vorkommt, dass dieselbe nur den Werth Null annehmen kann, so können alle Functionen p gleichzeitig grösser als Null sein.*** Denn gesetzt, man hätte für $u_1 = a_1$, $u_2 = a_2, \ldots$: $p_1 > 0$, für $u_1 = b_1$, $u_2 = b_2, \ldots$: $p_2 > 0$, u. s. w., so bekäme man für $u_1 = a_1 + b_1 + \cdots$, $u_2 = a_2 + b_2 + \cdots$, u. s. w.: $p_1 > 0$, $p_2 > 0, \ldots$

IV. Grundsatz der einfachen Ungleichungen.

Es sei

(1.) $$\begin{cases} A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + \cdots + A_{1n}u_n \equiv \Theta_1 \geqq 0, \\ A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + \cdots + A_{2n}u_n \equiv \Theta_2 \geqq 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

das gegebene System von Ungleichungen, und in jeder Lösung desselben möge

(2.) $$A_1u_1 + A_2u_2 + \cdots + A_nu_n \equiv \vartheta \geqq 0$$

bestehen.

Es giebt immer solche nicht-negativen, von den Variablen u unabhängigen Multiplicatoren λ, dass

(3.) $$\vartheta \equiv \lambda_1\Theta_1 + \lambda_2\Theta_2 + \cdots$$

ist.

Beweis.

Der in (2.) befindliche Coefficient A_n sei von 0 verschieden. Berechnen wir aus (2.) die Variable u_n, als Function der übrigen u und ϑ, und substituiren wir sie dann überall in (1.) durch diese Function. Wenn dies geschehen, dividiren wir die einzelnen Ungleichungen mit dem absoluten Werthe des Coefficienten des in ihnen befindlichen ϑ (insofern derselbe

von 0 verschieden ist). Das Resultat des Vorganges sei

$$(1'.)\qquad \begin{cases} \vartheta + p_1 \equiv \Theta_{p_1} \geqq 0, & \vartheta + p_2 \equiv \Theta_{p_2} \geqq 0, \ldots \\ r_1 \equiv \Theta_{r_1} \geqq 0, & r_2 \equiv \Theta_{r_2} \geqq 0, \ldots \\ -\vartheta + q_1 \equiv \Theta_{q_1} \geqq 0, & -\vartheta + q_2 \equiv \Theta_{q_2} \geqq 0, \ldots \end{cases}$$

wo $p_1, p_2, \ldots, r_1, r_2, \ldots$ einfache Functionen der Variablen $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ bedeuten.

Nach der Voraussetzung ist

$$(2'.)\qquad \vartheta \geqq 0$$

eine consecutive Ungleichung des Systems (1'.).

In der ersten Zeile von (1'.) ist nothwendiger Weise wenigstens eine Ungleichung, denn wenn die erste Zeile nicht bestände, so könnte $\vartheta < 0$ sein.

Jetzt schreibe ich anstatt des Systems (1'.) ein anderes auf, welches sich von diesem darin unterscheidet, dass es anstatt der dritten Zeile solche Ungleichungen enthält, welche aus (1'.) durch Eliminationen der Grösse ϑ entstehen

$$(1''.)\qquad \begin{cases} \vartheta + p_1 \equiv \Theta_{p_1} \geqq 0, & \vartheta + p_2 \equiv \Theta_{p_2} \geqq 0, \ldots \\ r_1 \equiv \Theta_{r_1} \geqq 0, & r_2 \equiv \Theta_{r_2} \geqq 0, \ldots \\ p_1 + q_1 \equiv \Theta_{p_1} + \Theta_{q_1} \geqq 0, & p_1 + q_2 \equiv \Theta_{p_1} + \Theta_{q_2} \geqq 0, \ldots \\ p_2 + q_1 \equiv \Theta_{p_2} + \Theta_{q_1} \geqq 0, & p_2 + q_2 \equiv \Theta_{p_2} + \Theta_{q_2} \geqq 0, \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Auch in jeder Lösung dieses Systems ist

$$(2''.)\qquad \vartheta \geqq 0.$$

Setzen wir nämlich voraus, dass hier $\vartheta < 0$ sein kann. Dann folgt aus der ersten Zeile, dass jedes $p > 0$. Ist p_1 das kleinste p, so kann darin ϑ noch den Werth $-p_1$ haben. So aber wird nach der dritten Zeile von (1''.) auch die dritte Zeile von (1'.) erfüllt sein, also auch das ganze System (1'.) Nun kann dies aber nach der Voraussetzung nur für nicht-negative Werthe von ϑ befriedigt werden: also kann auch bei jeder Lösung von (1''.) nur $\vartheta \geqq 0$ sein.

Nach dieser Begründung beschränken wir uns vor der Hand auf jene speciellen Lösungen von (1''.), in welchen kein p negativ ist, in welchen also

$$(1_1.)\qquad \begin{cases} p_1 \geqq 0, & p_2 \geqq 0, \dots \\ r_1 \geqq 0, & r_2 \geqq 0, \dots \\ p_1 + q_1 \geqq 0, & p_1 + q_2 \geqq 0, \dots \\ p_2 + q_1 \geqq 0, & p_2 + q_2 \geqq 0, \dots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

Jedenfalls existirt eine solche Lösung von (1″.), welche (1_1.) befriedigt (nämlich wenigstens dadurch, dass alle p, q, r verschwinden).

In (1_1.) ist wenigstens ein gewisses p stets $= 0$; widrigenfalls könnten alle p auf einmal > 0 sein (III. 2.), und dann könnte ϑ in (1″.) negative Werthe annehmen.

Es sei nun in jeder Lösung von (1_1.) $p_1 = 0$, also in allen

$$(2_1.)\qquad -p_1 \geqq 0,$$

und setzen wir voraus, dass im Falle von $n-1$ Variablen der zu beweisende Satz besteht. Dann besteht er in Bezug auf (1_1.) und (2_1.), denn in diesen kommen nur die Variablen $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ vor. Es existiren daher solche nicht-negativen Multiplicatoren $P, Q, R,$ dass

$$(3_1.)\qquad \begin{cases} -p_1 \equiv P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots + R_1 r_1 + R_2 r_2 + \dots \\ \qquad + Q_{11}(p_1 + q_1) + Q_{12}(p_1 + q_2) + \dots \\ \qquad + Q_{21}(p_2 + q_1) + Q_{22}(p_2 + q_2) + \dots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

Mit Hülfe dieser Identität kann man aber im Falle von n Variablen auch schliessen auf die Richtigkeit des Grundsatzes, das heisst, man kann schliessen auf (3.). Aus (1″.) lässt sich nämlich mit Rücksichtnahme auf (3_1.) nach leicht erkennbaren Operationen schliessen, dass

$$\begin{aligned} &(1 + P_1)\Theta_{p_1} + P_2\Theta_{p_2} + \dots + R_1\Theta_{r_1} + R_2\Theta_{r_2} + \dots \\ &\quad + Q_{11}(\Theta_{p_1} + \Theta_{q_1}) + Q_{12}(\Theta_{p_1} + \Theta_{q_2}) + \dots \\ &\quad + Q_{21}(\Theta_{p_2} + \Theta_{q_1}) + Q_{22}(\Theta_{p_2} + \Theta_{q_2}) + \dots \\ &\quad + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \equiv (1 + P_1 + P_2 + \dots)\,\vartheta. \end{aligned}$$

V. Grundsatz der einfachen Relationen.

Hat man das System von einfachen Relationen

$$(1.)\qquad \begin{cases} A'_{11}u_1 + A'_{12}u_2 + \cdots + A'_{1n}u_n \equiv \Theta'_1 = 0, \\ A'_{21}u_1 + A'_{22}u_2 + \cdots + A'_{2n}u_n \equiv \Theta'_2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A'_{l1}u_1 + A'_{l2}u_2 + \cdots + A'_{ln}u_n \equiv \Theta'_l = 0, \\ A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + \cdots + A_{1n}u_n \equiv \Theta_1 \geqq 0, \\ A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + \cdots + A_{2n}u_n \equiv \Theta_2 \geqq 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

und besteht in allen Lösungen dieses Systems die Ungleichung

$$(2.)\qquad A_1u_1 + A_2u_2 + \cdots + A_nu_n \equiv \vartheta \geqq 0,$$

so giebt es immer solche Multiplicatoren λ' und solche nicht-negativen Multiplicatoren λ, dass

$$(3.)\qquad \vartheta \equiv \lambda'_1\Theta'_1 + \lambda'_2\Theta'_2 + \cdots + \lambda'_l\Theta'_l + \lambda_1\Theta_1 + \lambda_2\Theta_2 + \cdots$$

Um dies einzusehen, haben wir nur die Gleichungen durch zwei entgegengesetzte Ungleichungen ($\Theta'_i \geqq 0$, $-\Theta'_i \geqq 0$) auszudrücken und dann den Grundsatz (IV.) anzuwenden.

In ausführlicher Entwicklung haben wir

$$(4.)\qquad \begin{cases} A_1 = \lambda'_1A'_{11} + \lambda'_2A'_{21} + \cdots + \lambda'_lA'_{l1} + \lambda_1A_{11} + \lambda_2A_{21} + \cdots, \\ A_2 = \lambda'_1A'_{12} + \lambda'_2A'_{22} + \cdots + \lambda'_lA'_{l2} + \lambda_1A_{12} + \lambda_2A_{22} + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_n = \lambda'_1A'_{1n} + \lambda'_2A'_{2n} + \cdots + \lambda'_lA'_{ln} + \lambda_1A_{1n} + \lambda_2A_{2n} + \cdots \\ (\lambda_1 \geqq 0,\ \lambda_2 \geqq 0, \ldots) \end{cases}$$

Ist $\vartheta = 0$ eine consecutive Gleichung des Systems (1.), *so ist $\vartheta \geqq 0$ und $-\vartheta \geqq 0$ eine consecutive Ungleichung desselben, es giebt also Multiplicatoren λ' und nicht-negative Multipticatoren λ, mit welchen die Identität* (3.) *besteht, und zugleich giebt es Multiplicatoren μ' und nicht-positive Multiplicatoren $-\mu$, welche an Stelle der Multiplicatoren λ' und λ die Identität* (3.) *erfüllen* . . .

Lässt man in (3.) die Multiplicatoren λ' und die nicht-negativen Multiplicatoren λ unbestimmt, so repräsentirt die Ungleichung $\vartheta \geqq 0$ offenbar alle möglichen consecutiven Ungleichungen des Systems (1.), und die Gesammtheit der Ungleichungen $\vartheta \geqq 0$ vereinigt in sich alle einfachen Relationen, welche in (1.) explicite oder implicite enthalten sind: *die Gleichungen* (4.) *mit unbestimmten Multiplicatoren λ' und mit unbestimmten nicht-negativen Multiplicatoren λ genommen, liefern die Coefficienten $A_1, A_2, \ldots$ aller möglichen in* (1.) *explicite oder implicite enthaltenen einfachen Relationen.*

VI. Parametrische Auflösung einfacher Relationssysteme.

Ich beabsichtige jetzt die Variablen u in der Weise als einfache Functionen theilweise beliebiger nicht-negativer, theilweise ganz beliebiger neuer Variablen zu bestimmen, dass durch diese Bestimmung alle unter (V. 1.) (explicite und implicite) ***enthaltenen Relationen, und nur diese, identisch erfüllt sein sollen.***

1. Zu diesem Ende schreiben wir die Gleichungen noch einmal auf und fügen möglichst viele derartige Ungleichungen hinzu, in denen die linken Seiten von einander und von den linken Seiten der Gleichungen unabhängig sind, so dass keine dieser linken Seiten als einfache Function der übrigen ausdrückbar ist. Nehmen wir an, dass die k ersten auf einander folgenden Ungleichungen diese Eigenschaft haben. Durch Einführung neuer Variablen $s_1, s_2, \ldots, s_k$ kann der gemeinte Theil des Systems (V. 1.) in folgender Weise geschrieben werden:

$$(5.)\quad \begin{cases} \Theta_1' = 0, \quad \Theta_2' = 0, \ldots, \quad \Theta_l' = 0, \quad \Theta_1 = s_1, \quad \Theta_2 = s_2, \ldots, \quad \Theta_k = s_k, \\ s_1 \geqq 0, \quad s_2 \geqq 0, \ldots, \quad s_k \geqq 0. \end{cases}$$

Die Anzahl sämmtlicher von einander unabhängigen linken Seiten kann höchstens n sein, d. h. gleich der Anzahl der Variablen. Berechnen wir jetzt ebenso viele Variablen u als einfache Functionen der übrigen und der s nicht-negativen Grössen, wie die Anzahl der von einander unabhängigen linken Seiten beträgt. Die Resultate der Rechnung geben ersichtlicher Weise solche Ausdrücke für die berechneten Variablen u, durch welche der Theil (5.) des Systems und, nur dieses, und die consecutiven Relationen desselben identisch erfüllbar sind, insofern man die übrigen Variablen u als ganz beliebig, die Variablen s aber als beliebige, nicht negative betrachtet. Diese übrigen Variablen u und die s sind die Parameter der für den Systemtheil (5.) benutzten parametrischen Ausdrücke.

2. Jetzt harren nur noch der Erledigung die vom Systeme (V. 1.) zurückgebliebenen Ungleichungen. Da die linken Seiten dieser Ungleichungen von den linken Seiten der übrigen Relationen in (V. 1.) nicht unabhängig, sondern ihre einfachen Functionen sind, so sind sie einfache Functionen der Grössen s.

Die zurückgebliebenen und der Erledigung harrenden Relationen können daher wie folgt geschrieben werden:

$$(6.)\qquad \begin{cases} C_{11}s_1 + C_{12}s_2 + \cdots + C_{1k}s_k \geqq 0, \\ C_{21}s_1 + C_{22}s_2 + \cdots + C_{2k}s_k \geqq 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ s_1 \geqq 0, \quad s_2 \geqq 0, \ldots, \quad s_k \geqq 0, \end{cases}$$

und jetzt sind noch die Grössen s als einfache Functionen neuer Variablen in der Weise zu bestimmen, dass dadurch die Ungleichungen (6.), und nur diese, und ihre Consecutiven identisch erfüllt sind.

Um unsere Erörterung zu vereinfachen, wollen wir zuerst nur die erste Ungleichung betrachten, d. h. wir wollen die Grössen s als neue einfache Functionen in der Weise ausdrücken, dass

$$(7.)\qquad \begin{cases} C_{11}s_1 + C_{12}s_2 + \cdots + C_{1k}s_k \geqq 0, \\ s_1 \geqq 0, \quad s_2 \geqq 0, \ldots, \quad s_k \geqq 0, \end{cases}$$

und dass andere einfache Relationen als diese und ihre Consecutiven nicht erfüllbar sein sollen.

3. Wären die Coefficienten $C_{11}, C_{12}, \ldots, C_{1k}$ alle nicht negativ, so hätten wir mit (7.) nichts zu thun, denn dann wären sie durch beliebige, nicht-negative Grössen s befriedigt, — und wir könnten uns mit Hinweglassung der ersten Ungleichung in (6.) zur zweiten wenden. Aber setzen wir voraus, dass unter den Coefffcienten $C_{11}, C_{12}, \ldots, C_{1k}$ negative vorhanden sind.

Wenn in diesem Falle nur einer von ihnen positiv ist, dann können wir auf leichte Weise zum Ziele gelangen. Es sei nämlich nur C_{11} positiv. Bedeuten in diesem Falle die Grössen $s_2, s_3, \ldots, s_k$ und die neue Grösse r beliebige nicht-negative, und bestimmt man dann s_1 in der Weise, dass

$$C_{11}s_1 = r - C_{12}s_2 - C_{13}s_3 - \cdots - C_{1k}s_k,$$

dann sind wir schon am Ziele, denn dann ist, wie ersichtlich, (7.) erfüllt *und weder mehr noch weniger, als* das System (7.) enthält.

4. Die Sache ist aber nicht so leicht, wenn unter den Coefficienten $C_{11}, C_{12}, \ldots, C_{1k}$ mehr als einer positiv ist. Es seien

$$C_{11} = P_1, \quad C_{12} = P_2, \ldots, \quad C_{1,\nu} = P_\nu$$

die positiven

$$C_{1,\nu+1} = -Q_1, \quad C_{1,\nu+2} = -Q_2, \ldots, \quad C_{1,\nu+\mu} = -Q_\mu$$

die negativen; die übrigen seien $= 0$. Schreiben wir noch um die Bezeichnungen zu vereinbaren

$$s_1 = p_1, \quad s_2 = p_2, \ldots, \quad s_\nu = p_\nu,$$
$$s_{\nu+1} = q_1, \quad s_{\nu+2} = q_2, \ldots, \quad s_{\nu+\mu} = q_\mu,$$

wodurch das System (7.) die Form

$$(7'.) \quad \begin{cases} P_1 p_1 + P_2 p_2 + \cdots + P_\nu p_\nu - Q_1 q_1 - Q_2 q_2 - \cdots - Q_\mu q_\mu \geqq 0, \\ p_1 \geqq 0, \quad p_2 \geqq 0, \ldots, \quad p_\nu \geqq 0, \\ q_1 \geqq 0, \quad q_2 \geqq 0, \ldots, \quad q_\mu \geqq 0 \end{cases}$$

annimmt.

Ich behaupte: *Wenn jede Grösse r in*

$$(8_1.) \quad \begin{cases} P_1 p_1 = r_1 + r_{11} + r_{12} + \cdots + r_{1\mu}, \\ P_2 p_2 = r_2 + r_{21} + r_{22} + \cdots + r_{2\mu}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_\nu p_\nu = r_\nu + r_{\nu 1} + r_{\nu 2} + \cdots + r_{\nu\mu}; \end{cases}$$

$$(8_2.) \quad \begin{cases} Q_1 q_1 = r_{11} + r_{21} + \cdots + r_{\nu 1}, \\ Q_2 q_2 = r_{12} + r_{22} + \cdots + r_{\nu 2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q_\mu q_\mu = r_{1\mu} + r_{2\mu} + \cdots + r_{\nu\mu} \end{cases}$$

beliebig nicht-negativ ist, dann haben wir in der Weise neue Parameter (r) eingeführt, dass (7'.) also zugleich die Ungleichungen in (7.) erfüllt sind, und andere Relationen als diese und solche, welche ihre Consecutiven sind, nicht befriedigt werden können.

Beweis. Einleuchtend ist, dass vermöge $(8_1.)$ und $(8_2.)$ durch die nicht-negativen Variablen r (7'.) identisch befriedigt wird. Durch Substitution in der ersten Ungleichung in (7'.) entsteht nämlich

$$r_1 + r_2 + \cdots r_\nu \geqq 0,$$

was mit Rücksicht darauf, dass kein r negativ ist, eine Identität bildet. Die übrigen Ungleichungen in (7'.) werden aber, da jede Grösse P und Q positiv, und dadurch dass kein r negativ ist, wegen $(8_1.)$ und $(8_2.)$ ersichtlicher Weise ebenfalls identisch befriedigt. Es bleibt uns noch übrig jenen schwierigeren Theil des Beweises zu liefern, dass $(8_1.)$ und $(8_2.)$ andere einfache Relationen, wie (7'.) und solche, welche daraus folgen, identisch nicht befriedigt, d. h. durch beliebige nicht-negative Grössen r.

Um dies zu beweisen, wollen wir vor allem anderen sehen, was für Relationen man als aus (7'.) folgende einfache Relationen betrachten kann. Ist eine solche Relation die folgende Ungleichung:

$$L_1 p_1 + L_2 p_2 + \cdots + L_\nu p_\nu + M_1 q_1 + M_2 q_2 + \cdots + M_\mu q_\mu \geqq 0,$$

dann muss sie durch alle p und q Grössen erfüllt werden, welche (7′.) befriedigen. Wird sie aber von allen diesen p und q erfüllt, dann muss es solche nicht-negativen Multiplicatoren σ, π und χ geben, dass

$$L_1 = \pi_1 + \sigma P_1, \quad L_2 = \pi_2 + \sigma P_2, \ldots, \quad L_\nu = \pi_\nu + \sigma P_\nu,$$
$$M_1 = \chi_1 - \sigma Q_1, \quad M_2 = \chi_2 - \sigma Q_2, \ldots, \quad M_\mu = \chi_\mu - \sigma Q_\mu.$$

Eine aus (7′.) folgende Ungleichung kann daher nur die Form

$$(9.) \quad \begin{cases} (\pi_1 + \sigma P_1) p_1 + (\pi_2 + \sigma P_2) p_2 + \cdots + (\pi_\nu + \sigma P_\nu) p_\nu + \\ (\chi_1 - \sigma Q_1) q_1 + (\chi_2 - \sigma Q_2) q_2 + \ldots + (\chi_\mu - \sigma Q_\mu) q_\mu \geqq 0 \end{cases}$$

haben, wo $\sigma \geqq 0$, und ebenso

$$\pi_1 \geqq 0, \quad \pi_2 \geqq 0, \ldots, \quad \pi_\nu \geqq 0,$$
$$\chi_1 \geqq 0, \quad \chi_2 \geqq 0, \ldots, \quad \chi_\mu \geqq 0.$$

Durch zweckmässige Wahl der nicht-negativen Multiplicatoren σ, π, χ ist jede consecutive Ungleichung in (9.) enthalten, so dass (9.) alle jene einfachen Ungleichungen enthält, welche in (7′.) implicite oder explicite enthalten sind.

Es ist zu zeigen, dass wir in Folge dessen, dass die Grössen r beliebig nicht-negativ sind, aus den Grössen p und q nur solche einfachen Relationen construiren können, welche man auf die Form (9.) bringen kann.

φ und ψ sollen vor der Hand ganz beliebige Grössen bedeuten, mit welchen wir, als mit Multiplicatoren, die Ausdrücke (8_1.) und (8_2.) in Verbindung bringen

$$\varphi_1 P_1 p_1 + \varphi_2 P_2 p_2 + \cdots + \varphi_\nu P_\nu p_\nu +$$
$$\psi_1 Q_1 q_1 + \psi_2 Q_2 q_2 + \cdots + \psi_\mu Q_\mu q_\mu =$$

$$(10.) \quad \begin{cases} = \varphi_1 r_1 + \varphi_2 r_2 + \cdots + \varphi_\nu r_\nu, \\ + (\varphi_1 + \psi_1) r_{11} + (\varphi_1 + \psi_2) r_{12} + \cdots + (\varphi_1 + \psi_\mu) r_{1\mu}, \\ + (\varphi_2 + \psi_1) r_{21} + (\varphi_2 + \psi_2) r_{22} + \cdots + (\varphi_2 + \psi_\mu) r_{2\mu}, \\ + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ + (\varphi_\nu + \psi_1) r_{\nu 1} + (\varphi_\nu + \psi_2) r_{\nu 2} + \cdots + (\varphi_\nu + \psi_\mu) r_{\nu\mu}. \end{cases}$$

Damit dies in Bezug auf die Grössen p und q eine einfache Relation bedeutet, ist nothwendig und hinreichend, dass die Multiplicatoren φ und ψ derartig seien, dass für alle nicht-negativen Werthe von r die rechte Seite $\geqq 0$ werde.

Diese rechte Seite wird aber für alle nicht-negativen r nur dann $\geqq 0$, wenn

$$(11.)\quad \begin{cases} \varphi_1 \geqq 0, & \varphi_2 \geqq 0, \ldots, & \varphi_\nu \geqq 0, \\ \varphi_1 + \psi_1 \geqq 0, & \varphi_1 + \psi_2 \geqq 0, \ldots, & \varphi_1 + \psi_\mu \geqq 0, \\ \varphi_2 + \psi_1 \geqq 0, & \varphi_2 + \psi_2 \geqq 0, \ldots, & \varphi_2 + \psi_\mu \geqq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\

dieses System lässt sich dasselbe Verfahren anwenden u. s. f., bis alle Ungleichungen aus (1.) aufgebraucht sind.

Sind auf diese Weise die aus (5.) ***berechneten Variablen u als einfache Functionen der übrigen Variablen u und einer gewissen Anzahl nicht-negativer Parameter bestimmt, so sind dieselben in der Weise bestimmt, dass sämmtliche Relationen*** (1.), ***und nur diese, und ihre Consecutiven identisch erfüllt sind.***

VII. Ueber die Beziehungen der Coefficienten.

1. Setzen wir voraus, dass wir das System (V. 1.) parametrisch aufgelöst haben, und bezeichnen wir in dieser Auflösung mit $v_1, v_2, \ldots$ die ganz willkürlichen mit $w_1, w_2, \ldots$, die willkürlichen, nicht-negativen Parameter, so dass die parametrische Auflösung in folgenden Ausdrücken besteht:

$$(1.)\qquad \begin{cases} u_1 = \beta_{11}v_1 + \beta_{12}v_2 + \cdots + \gamma_{11}w_1 + \gamma_{12}w_2 + \cdots, \\ u_2 = \beta_{21}v_1 + \beta_{22}v_2 + \cdots + \gamma_{21}w_1 + \gamma_{22}w_2 + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

wo natürlich die Coefficienten β und γ durch die Coefficienten des Systems (V. 1.) bestimmt sind.

Ist nun

$$(2.)\qquad A_1u_1 + A_2u_2 + \cdots + A_nu_n \geqq 0$$

eine consecutive Relation des Systems (V. 1.), so haben wir für alle denkbaren Werthe v, und für alle denkbaren nicht-negativen Werthe w:

$$(A_1\beta_{11} + A_2\beta_{21} + \cdots)v_1 + (A_1\beta_{12} + A_2\beta_{22} + \cdots)v_2 + \cdots$$
$$+ (A_1\gamma_{11} + A_2\gamma_{21} + \cdots)w_1 + (A_1\gamma_{12} + A_2\gamma_{22} + \cdots)w_2 + \cdots \geqq 0.$$

Daraus folgt

$$(3.)\qquad \begin{cases} \beta_{11}A_1 + \beta_{21}A_2 + \cdots + \beta_{n1}A_n = 0, \\ \beta_{12}A_1 + \beta_{22}A_2 + \cdots + \beta_{n2}A_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \gamma_{11}A_1 + \gamma_{21}A_2 + \cdots + \gamma_{n1}A_n \geqq 0, \\ \gamma_{12}A_1 + \gamma_{22}A_2 + \cdots + \gamma_{n2}A_n \geqq 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Man überzeugt sich davon, indem man alle Parameter, einen ausgenommen, gleich Null setzt.

Das Bestehen dieses Systems (3.) ***ist offenbar die nothwendige und auch hinreichende Bedingung dafür, dass die Relation*** (2.) ***eine consecutive Ungleichung***

des Systems (V. 1.) ***darstellt.*** Dass es auch hinreichende Bedingung ist, erhellt, wenn die Relationen (3.) der Reihe nach mit den ganz willkürlichen Parametern v, beziehungsweise mit den willkürlichen nicht-negativen Parametern w multiplicirt und dann addirt werden, und dem zu Folge eine Substitution nach (1.) vorgenommen wird.

Die Relationen (3.) ***sind eben aequivalent mit den multiplicatorischen Ausdrücken*** (V. 4.), ***deren System als parametrische Auflösung des Systems*** (3.), ***— mit den Multiplicatoren als Parametern — erscheint.*** Sobald eine Ungleichung eine consecutive Relation des Systems (V. 1.) bildet, befolgen die Coefficienten derselben die bestimmten Gleichungen und Ungleichungen (3.) und umgekehrt.

2. Wenn man in den parametrischen Ausdrücken (1.) alle nicht negativen Parameter (w) gleich Null setzt, so gelangt man in (3.) lediglich zu den bestimmten Gleichungen.

Indem man aber alle w gleich Null setzt, setzt man zugleich alle s in (VI. 5) gleich Null, weil, wie leicht ersichtlich, die Parameter s einfache Functionen der Parameter w sind. Da nun alle linken Seiten in (V. 1.) einfache Functionen der linken Seiten in (VI. 5.) sind, so kann man die bestimmten Gleichungen in (3.) auch dadurch erhalten, dass man alle linken Seiten in (V. 1.) gleich Null setzt, und dann die Ungleichung (2.) als consecutive Relation des hiermit fingirten Gleichungssystems behandelt. Das entgegengesetzte von (2.) ist aber auch eine consecutive Ungleichung des fingirten Systems, weil alle Lösungen dieses Systems mit veränderten Vorzeichen auch Lösungen desselben vorstellen.

Verändert man also das System (V. 1.) ***in der Weise, dass man anstatt aller Ungleichungen Gleichungen schreibt, so kann man auch alle consecutiven Ungleichungen auf ähnliche Weise verändern, und von den fingirten Relationen ausgehend, gelangt man immer zu denselben bestimmten Gleichungen für die Beziehungen der Coefficienten, welche aus den wirklichen Relationen folgen. Man bekommt aber nicht die Ungleichungen, welche in*** (3.) ***zwischen den Coefficienten weitere Beziehungen vorstellen.***

VIII. Zusammensetzung verschiedener einschränkender Systeme.

Nehmen wir an, dass die Ungleichung

$$(\vartheta.) \qquad A_1 u_1 + A_2 u_2 + \cdots + A_n u_n \equiv \vartheta \geqq 0$$

so beschaffen ist, dass dieselbe für alle Lösungen des Systems

$$(\theta, \theta'.)\quad \begin{cases} A'_{11}u_1 + A'_{12}u_2 + \cdots + A'_{1n}u_n \equiv \theta'_1 = 0, \\ A'_{21}u_1 + A'_{22}u_2 + \cdots + A'_{2n}u_n \equiv \theta'_2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A'_{l1}u_1 + A'_{l2}u_2 + \cdots + A'_{ln}u_n \equiv \theta'_n = 0, \\ A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + \cdots + A_{1n}u_n \equiv \theta_1 \geqq 0, \\ A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + \cdots + A_{2n}u_n \equiv \theta_2 \geqq 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

bestehen soll. Dann müssen die Coefficienten $A_1, A_2, \ldots$ das System (VII. 3) befriedigen.

Ist aber vorgeschrieben, dass die Ungleichung (9) bloss für dasjenige Werthgebiet der Variablen u bestehen soll, welches ausser der Einschränkung (θ, θ') noch einer anderen unterworfen ist, dann kommt den Coefficienten $A_1, A_2, \ldots$ im allgemeinen eine grössere Freiheit zu.

Unterwirft man z. B. die Variablen u ausser dem Systeme (θ, θ') noch dem folgenden:

$$(\varpi, \varpi'.)\quad \begin{cases} B'_{11}u_1 + B'_{12}u_2 + \cdots + B'_{1n}u_n \equiv \varpi'_1 = 0, \\ B'_{21}u_1 + B'_{22}u_2 + \cdots + B'_{2n}u_n \equiv \varpi'_2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B'_{m1}u_1 + B'_{m2}u_2 + \cdots + B'_{mn}u_n \equiv \varpi'_m = 0, \\ B_{11}u_1 + B_{12}u_2 + \cdots + B_{1n}u_n \equiv \varpi_1 \geqq 0, \\ B_{21}u_1 + B_{22}u_2 + \cdots + B_{2n}u_n \equiv \varpi_2 \geqq 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

so dürfen die Coefficienten $A_1, A_2, \ldots$ alle die Werthe annehmen, welche bei unbestimmten nicht-negativen Multiplicatoren λ, μ, und bei vollends unbestimmten Multiplicatoren λ', μ', durch die Ausdrücke

$$\begin{aligned} A_1 = {} & A'_{11}\lambda'_1 + A'_{21}\lambda'_2 + \cdots + B'_{11}\mu'_1 + B'_{21}\mu'_2 + \cdots + \\ & + A_{11}\lambda_1 + A_{21}\lambda_2 + \cdots + B_{11}\mu_1 + B_{21}\mu_2 + \cdots, \\ A_2 = {} & A'_{12}\lambda'_1 + A'_{22}\lambda'_2 + \cdots + B'_{12}\mu'_1 + B'_{22}\mu'_2 + \cdots + \\ & + A_{12}\lambda_1 + A_{22}\lambda_2 + \cdots + B_{12}\mu_1 + B_{22}\mu_2 + \cdots, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

gegeben sind. Sind aber die Variablen u nur dem Systeme (θ, θ') untergeordnet, so sind diese Ausdrücke nur für $\mu' = 0$, $\mu = 0$ gültig.

Es ist jedoch möglich, dass durch eine neue Einschränkung des Werthgebietes u die Freiheit der Coefficienten $A_1, A_2, \ldots$ gar nicht erweitert wird.

Betrachten wir nämlich die parametrischen Auflösungen des Systems (θ, θ')

$$u_1 = \beta_{11} v_1 + \beta_{12} v_2 + \cdots + \gamma_{11} w_1 + \gamma_{12} w_2 + \cdots,$$
$$u_2 = \beta_{21} v_1 + \beta_{22} v_2 + \cdots + \gamma_{21} w_1 + \gamma_{22} w_2 + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(w_1 \geqq 0, \quad w_2 \geqq 0, \ldots),$$

woraus die Relationen (VII. 3.) für die Coefficienten $A_1, A_2, \ldots$ folgen. Verengert man nun z. B. auf solche Art das Werthgebiet u, dass man für die Parameter v die drei Werthe $-\varepsilon, 0, \varepsilon$ und für die Parameter w die zwei Werthe $0, \varepsilon$ vorschreibt, wo ε irgend eine gegebene positive Grösse bedeutet, so folgen noch immer die Relationen (VII. 3.). Man überzeugt sich davon leicht, indem man eine der Variablen v einmal gleich $-\varepsilon$, einmal gleich ε, und alle übrigen Parameter v und w gleich Null setzt, dann eine der Variablen w gleich ε und alle übrigen Parameter v und w gleich Null setzt.

Ein wichtiger Fall dieser Art ist der, in welchem den absoluten Werthen der Variablen u eine obere Grenze zugewiesen ist. *Wie klein auch diese obere Grenze sein mag, die Coefficienten* A_1, A_2, *u. s. w. müssen die Relationen* (VII. 3.) *befriedigen.* Nach dem vorhergehenden Beispiele ist dies leicht einzusehen.

IX. Infinitesimale Systeme.

1. Die unbestimmten Veränderlichen $\xi, \eta, \ldots$ sollen in dem Raume T überall differentiirbare Functionen des Ortes (x, y, z) sein, überall im Inneren dieses Raumes der Ungleichung

$$(1.) \qquad A_0 \xi + A_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \xi}{\partial y} + A_3 \frac{\partial \xi}{\partial z} + B_0 \eta + \cdots \geqq 0$$

genügen, und auf der Oberfläche S dieses Raumes die Ungleichung

$$(2.) \qquad L\xi + M\eta + \cdots \geqq 0$$

befriedigen. Durch alle Lösungen dieser Ungleichungen soll die Integral-Ungleichung

$$(3.) \qquad \int_T \left(X_0 \xi + X_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} + X_2 \frac{\partial \xi}{\partial y} + X_3 \frac{\partial \xi}{\partial z} + Y_0 \eta + \cdots \right) D\tau \geqq 0$$

erfüllt werden. Dabei bedeuten die Coefficienten $A_0, B_0, \ldots, X_0, Y_0, \ldots$ stetige Functionen, die Coefficienten $A_1, A_2, A_3, B_1, \ldots, X_1, X_2, X_3, Y_1, \ldots$ differentiirbare Functionen des Ortes im Raume T, und die Coefficienten $L, M, \ldots$ stetige Functionen auf der Oberfläche S dieses Raumes. — Das Integral ist wohl bestimmt, weil Functionen des Ortes, welche in einem Raume überall differentiirbar sind, nothwendig die Eigenschaft besitzen, dass

ihre nach den Coordinaten genommenen partiellen Derivirten in dem betreffenden Raume stetig sind.

2. Diese Voraussetzung kann durch die folgende ersetzt werden.

Theilen wir das Innere des Raumes T bis zur Grenze S in sehr kleine congruente Prismen durch Ebenen, welche parallel zu den Coordinaten-Ebenen gelegt werden. Die Kanten dieser Prismen sollen die Längen Dx, Dy, Dz haben, je nachdem dieselben der x- oder y- oder z-Achse parallel sind. Die vorkommenden Functionen des Ortes sollen sich im Inneren des Raumes T auf die Centren (x, y, z) der Prismen beziehen, und folgende Bezeichnungen sollen benutzt werden:

$$\xi(x, y, z) \equiv \xi, \qquad \xi(x+Dx, y, z) \equiv \xi_{\mathrm{I}}, \qquad \xi(x, y+Dy, z) \equiv \xi_{\mathrm{II}},$$
$$\xi(x, y, z+Dz) \equiv \xi_{\mathrm{III}}, \qquad \text{u. s. w.}$$

Die Oberfläche S des Raumes T wird von den Ebenen in sehr kleine Theile $D\sigma$ getheilt. Bei diesen Theilen $D\sigma$ werden die Functionen des Ortes auf je ein nächstes Prismen-Centrum bezogen.

Nun sollen die Längen Dx, Dy, Dz so klein gewählt werden können, dass sobald dieselben noch kleiner sind, in den Centren der Prismen zwischen den Variablen $\xi, \eta, \ldots$ und den neuen Unbestimmten $u, \ldots$, welche nur mit endlichen Werthen in Betracht kommen sollen, mit Fehlern, die unterhalb einer willkürlich gegebenen Grenze bleiben, folgende Relationen bestehen:

$$(4.) \qquad A_0\xi + A_1\frac{\xi_{\mathrm{I}}-\xi}{Dx} + A_2\frac{\xi_{\mathrm{II}}-\xi}{Dy} + A_3\frac{\xi_{\mathrm{III}}-\xi}{Dz} + B_0 y + \cdots \geqq 0,$$

$$(5.) \qquad \begin{cases} \left(\frac{\xi_{\mathrm{I}}-\xi}{Dx}\right)_{\mathrm{I}} - \frac{\xi_{\mathrm{I}}-\xi}{Dx} = a_1' u_1', \\ \left(\frac{\xi_{\mathrm{II}}-\xi}{Dy}\right)_{\mathrm{I}} - \frac{\xi_{\mathrm{II}}-\xi}{Dy} = a_1'' u_1'', \\ \left(\frac{\xi_{\mathrm{III}}-\xi}{Dz}\right)_{\mathrm{I}} - \frac{\xi_{\mathrm{III}}-\xi}{Dz} = a_1''' u_1''', \\ \left(\frac{\xi_{\mathrm{I}}-\xi}{Dx}\right)_{\mathrm{II}} - \frac{\xi_{\mathrm{I}}-\xi}{Dx} = a_2' u_2', \\ \text{u. s. w.}, \end{cases}$$

wo die Coefficienten a_1', a_1'', u. s. w. mit Dx, die Coefficienten a_2', a_2'', u. s. w. mit Dy, die Coefficienten a_3', a_3'', u. s. w. mit Dz nach Null convergiren, — an der Oberfläche S aber in den nächsten Centren

$$(6.) \qquad L\xi + M\eta + \cdots \geqq 0,$$

und für sämmtliche Lösungen dieser Relationen

$$(7.)\qquad \sum_T \left(X_0\xi + X_1 \frac{\xi_1 - \xi}{Dx} + \cdots\right) D\tau \geqq 0, \qquad (D\tau \equiv Dx\, Dy\, Dz)$$

ist. Die Coefficienten $A, B, \ldots, L, M, \ldots, X, \ldots$ sollen dabei die in (1.) aufgezählten Eigenschaften besitzen.

3. Es muss Multiplicatoren geben für die Gleichungen (5.) und nicht-negative Multiplicatoren für die Ungleichungen (4.) und (6.), so dass diese Relationen mit jenen Multiplicatoren versehen und addirt die Ungleichung (7.) identisch ergeben. Da aber in der Relation (7.) die Unbestimmten $u_1, \ldots$ nicht vorkommen, fällt der von (5.) herstammende Theil gänzlich aus der Identität heraus. Bezeichnen wir daher mit $\varphi D\tau$ die nicht-negativen Multiplicatoren von (4.) und mit $\varrho D\sigma$ diejenigen von (6.), so haben wir

$$\sum_T \left(A_0\xi + A_1 \frac{\xi_1 - \xi}{Dx} + \cdots\right)\varphi D\tau + \sum_S (L\xi + \cdots)\varrho D\sigma \equiv \sum_T \left(X_0\xi + X_1 \frac{\xi_1 - \xi}{Dx} + \cdots\right) D\tau.$$

Giebt es noch andere einschränkende Relationen von der Form (1.) und (2.), so haben wir

$$(8.)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum_T \left(\xi \Sigma A_0\varphi + \frac{\xi_1 - \xi}{Dx} \Sigma A_1\varphi + \cdots\right) D\tau + \sum_S (\xi \Sigma L\varrho + \cdots) D\sigma \equiv \\ &\qquad\qquad \sum_T \left(X_0\xi + X_1 \frac{\xi_1 - \xi}{Dx} + \cdots\right) D\tau. \end{aligned} \right.$$

Bei unendlicher Verkleinerung der Längen Dx, Dy, Dz verwandeln sich die Differenzen-Quotienten laut (5.) in partielle Derivirte, welche sich als im Raume T überall stetige Functionen des Ortes ergeben. Die rechte Seite der Identität (8.) geht in ein wohl bestimmtes Raum-Integral über, welches durch partielle Quadraturen als die Summe eines Raum- und eines Oberflächen-Integrals dargestellt werden kann, wo dann Derivirte der Variablen $\xi, \eta, \ldots$ nicht mehr vorkommen. Der linken Seite der Identität (8.) muss nothwendig dieselbe Beschaffenheit zukommen. Wir haben also nach Ausführung der partiellen Quadraturen

$$(9.)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_T \left[\left(\Sigma A_0\varphi - \frac{\partial}{\partial x}\Sigma A_1\varphi - \frac{\partial}{\partial y}\Sigma A_2\varphi - \frac{\partial}{\partial z}\Sigma A_3\varphi\right)\xi + \cdots\right] D\tau + \\ &\int_S \left[(\Sigma L\varrho - \alpha\Sigma A_1\varphi - \beta\Sigma A_2\varphi - \gamma\Sigma A_3\varphi)\xi + \cdots\right] D\sigma \equiv \\ &\int_T \left[\left(X_0 - \frac{\partial X_1}{\partial x} - \frac{\partial X_2}{\partial y} - \frac{\partial X_3}{\partial z}\right)\xi + \cdots\right] D\tau - \\ &\int_S \left[(X_1\alpha + X_2\beta + X_3\gamma)\xi + \cdots\right] D\sigma, \end{aligned} \right.$$

wo α, β, γ die Richtungs-Cosinus der nach dem Inneren des Raumes T gerichteten Normalen bezeichnen.

Daraus folgt, dass es nicht-negative Multiplicatoren φ und ϱ giebt, für welche im Inneren des Raumes T

$$(10.)\quad \begin{cases} X_0 - \dfrac{\partial X_1}{\partial x} - \dfrac{\partial X_2}{\partial y} - \dfrac{\partial X_3}{\partial z} = \Sigma A_0 \varphi - \dfrac{\partial}{\partial x}\Sigma A_1 \varphi - \dfrac{\partial}{\partial y}\Sigma A_2 \varphi - \dfrac{\partial}{\partial z}\Sigma A_3 \varphi, \\ Y_0 - \dfrac{\partial Y_1}{\partial x} - \dfrac{\partial Y_2}{\partial y} - \dfrac{\partial Y_3}{\partial z} = \Sigma B_0 \varphi - \dfrac{\partial}{\partial x}\Sigma B_1 \varphi - \dfrac{\partial}{\partial y}\Sigma B_2 \varphi - \dfrac{\partial}{\partial z}\Sigma B_3 \varphi, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

und auf der Oberfläche S dieses Raumes

$$(11.)\quad \begin{cases} X_1\alpha + X_2\beta + X_3\gamma = -\Sigma L\varrho + \alpha\Sigma A_1\varphi + \beta\Sigma A_2\varphi + \gamma\Sigma A_3\varphi, \\ Y_1\alpha + Y_2\beta + Y_3\gamma = -\Sigma M\varrho + \alpha\Sigma B_1\varphi + \beta\Sigma B_2\varphi + \gamma\Sigma B_3\varphi, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

4. Da hier nach der Voraussetzung die gegebenen einschränkenden Relationen aus lauter Ungleichungen bestanden, bedeuten alle Multiplicatoren φ und ϱ nicht-negative Grössen. ***Wenn auch Gleichungen, oder bloss Gleichungen unter den gegebenen einschränkenden Relationen vorkommen, so erleiden die ausgeführten Betrachtungen nur insofern eine Abänderung, als die Multiplicatoren der Gleichungen a priori keiner Beschränkung unterworfen sind.***

Wenn in dem Raume T gewisse Flächen für gewisse Functionen des Ortes Unstetigkeits-Oerter bilden, so muss dieser Umstand bei den partiellen Quadraturen in Betracht gezogen werden. Insofern aber für die Unbestimmten $\xi, \eta, \ldots$ gewöhnliche Unstetigkeits-Flächen vorhanden sind, hat man für solche Flächen im allgemeinen auch einschränkende Relationen zwischen diesen Unbestimmten. Diese Relationen beziehen sich überall auf die zwei verschiedenen Werthe, welche den Unbestimmten an der einen und anderen Seite der Flächen zukommen. Diese Relationen müssen natürlich multiplicatorisch auch in Rechnung gezogen werden.

X. Zusätze.

§ 1. ***Bedingung dafür, dass in einem einfachen Relations-Systeme eine Ungleichung eine Gleichung ist.***

Wenn in dem Systeme einfacher Relationen

$$\theta_1' = 0, \quad \theta_2' = 0, \ldots, \quad \theta_i' = 0,$$
$$\theta_1 \geqq 0, \quad \theta_2 \geqq 0, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

die linke Seite θ_1 der ersten Ungleichung nur den Werth Null annehmen kann, so ist die Gleichung $\theta_1 = 0$ offenbar eine consecutive Gleichung des

Systems. Folglich muss es Multiplicatoren $-\mu'$ und nicht-positive Multiplicatoren $-\mu$ geben (V.), mit welchen die Identität

$$\theta \equiv -\mu_1'\theta_1' - \mu_2'\theta_2' - \cdots - \mu_l'\theta_l' - \mu_1\theta_1 - \mu_2\theta_2 - \cdots$$

besteht. ***Die Identität***

$$\mu_1'\theta_1' + \mu_2'\theta_2' + \cdots + \mu_l'\theta_l' + (1+\mu_1)\theta_1 + \mu_2\theta_2 + \cdots \equiv 0$$
$$(\mu_1 \geqq 0, \quad \mu_2 \geqq 0, \ldots)$$

ist also eine nothwendige Bedingung dafür, dass in dem gegebenen Systeme die linke Seite θ_1 der ersten Ungleichung nur den Werth Null annehmen kann. Diese Identität ist auch eine hinreichende Bedingung; denn mit Rücksicht auf die Gleichungen $\theta' = 0$ des Systems entnimmt man aus der Identität die Gleichung

$$(1+\mu_1)\theta_1 + \mu_2\theta_2 + \cdots = 0,$$

woraus in Betracht dessen, dass alle Functionen θ und alle Multiplicatoren μ nicht negative Grössen sind, die Gleichung $\theta_1 = 0$ sich ergiebt.

Existirt keine Identität in der Form

$$\Sigma\lambda'\theta' + \Sigma\lambda\theta \equiv 0, \quad (\lambda \geqq 0)$$

mit wenigstens einem von Null verschiedenen Multiplicator λ, so können in dem gegebenen Systeme alle linken Seiten θ von Null verschiedene Werthe annehmen, und folglich können dieselben auch zugleich lauter positive (> 0) Werthe haben (III. 2.). Existirt aber eine solche Identität mit von Null verschiedenen Multiplicatoren λ, so können die Functionen θ, welche mit positiven (> 0) Multiplicatoren in der Identität vorkommen, nur den Werth Null in dem gegebenen Systeme annehmen.

§ 2. ***Sätze über Eliminationen.***

Schreiben wir

$$A_{i1}'u_1 + A_{i2}'u_2 + \cdots + A_{im}'u_m \equiv U_i',$$
$$A_{i1}u_1 + A_{i2}u_2 + \cdots + A_{im}u_m \equiv U_i,$$
$$B_{i1}'v_1 + B_{i2}'v_2 + \cdots + B_{in}'v_n \equiv V_i',$$
$$B_{i1}v_1 + B_{i2}v_2 + \cdots + B_{in}v_n \equiv V_i,$$

und betrachten jetzt das System

$$U_1' + V_1' = 0, \qquad U_2' + V_2' = 0, \qquad \ldots$$
$$U_1 + V_1 \geqq 0, \qquad U_2 + V_2 \geqq 0, \qquad \ldots.$$

1. Enthält das System implicite oder explicite Relationen, in welchen kein u vorkommt, so giebt es in gleicher Anzahl Systeme von Multiplicatoren λ' und nicht-negativen Multipliactoren λ, für welche

$$\Sigma\lambda' U' + \Sigma\lambda U \equiv 0.$$

Denn wenn V_0 in allen Lösungen des Systems $\geqq 0$ oder $= 0$ ist, so giebt es Multiplicatoren λ' und nicht-negative Multiplicatoren λ, für welche

$$\Sigma\lambda'(U'+V') + \Sigma\lambda(U+V) \equiv V_0,$$

woraus die behauptete Identität folgt.

Beim Mangel einer solchen Identität können also aus dem Systeme Relationen, in denen kein u vorkommt, nicht gefolgert werden; dann können die Variablen u nicht eliminirt werden.

In diesem Falle können die Variablen v alle denkbaren Werthe annehmen. Berechnet man nämlich aus den gegebenen Gleichungen $(U'+V'=0)$ so viele der Grössen u wie möglich als Functionen der übrigen und der Grössen v, und substituirt diese Functionen in die Ungleichungen $(U+V \geqq 0)$, so gehen letztere in ein System von Ungleichungen über, welches mit dem ganzen ursprünglichen Systeme aequivalent ist. Wir schreiben dieses System

$$\overline{U}_1+\overline{V}_1 \geqq 0, \qquad \overline{U}_2+\overline{V}_2 \geqq 0, \qquad \ldots \quad .$$

Da die Variablen u, welche in diesem Systeme noch vorkommen, aus demselben nicht eliminirt werden können, giebt es keine nicht-negativen Multiplicatoren λ, bei welchen die Summe $\Sigma\lambda\overline{U}$ identisch verschwinden könnte, folglich kann zu gleicher Zeit $\overline{U}_1 > 0$, $\overline{U}_2 > 0, \ldots$ gemacht werden (§ 1.). Die Grössen V, und hiermit die Variablen v können also nach Willkür alle denkbaren Werthe annehmen.

2. ***Enthält das System implicite oder explicite Relationen, in welchen kein u vorkommt, so können die Variablen v alle die Werthe erhalten, welche sich mit der Gesammtheit dieser Relationen vertragen.***

Um uns davon zu überzeugen, berechnen wir wiederum aus den gegebenen Gleichungen $(U'+V'=0)$ so viele der Grössen u wie möglich als Functionen der übrigen und der Grössen v, und substituiren diese Functionen in alle Gleichungen und Ungleichungen. So erhalten wir im allgemeinen ein System von Gleichungen

(a.) $$\overline{V}_1' = 0, \quad \overline{V}_2' = 0, \quad \ldots,$$

in welchem keine der Grössen u mehr vorkommt, und ein System von Ungleichungen

(b.) $$\overline{U}_1+\overline{V}_1 \geqq 0, \qquad \overline{U}_2+\overline{V}_2 \geqq 0, \qquad \ldots,$$

in welchem die berechneten Variablen nicht mehr vorkommen. Wir setzen

dabei voraus, dass die Grössen $u_{p+1}, u_{p+2}, \ldots u_m$ die berechneten Variablen sind.

Eliminiren wir nun vorläufig nur eine der noch vorkommenden Variablen u, nämlich u_1 aus den Ungleichungen (b.). Zu diesem Zwecke sollen die Ungleichungen, welche die Variable u_1 enthalten, in der Form

$$\text{(b'.)} \qquad \begin{cases} u_1 - P_1 \geqq 0, & u_1 - P_2 \geqq 0, \ldots \\ -u_1 + Q_1 \geqq 0, & -u_2 + Q_2 \geqq 0, \ldots \end{cases}$$

geschrieben werden. Für das Resultat von Eliminationen erhalten wir das System

$$\text{(c.)} \qquad \begin{cases} Q_1 - P_1 \geqq 0, & Q_1 - P_2 \geqq 0, \ldots \\ Q_2 - P_1 \geqq 0, & Q_2 - P_2 \geqq 0, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Es ist zu zeigen, dass abgesehen von den Gleichungen (a.), und von jenen Ungleichungen (b.), welche die Variable u_1 nicht enthalten, die Variablen $u_2, u_3, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots$ alle die Werthe erhalten können, welche dieses System befriedigen. Dies ist aber offenbar der Fall, sobald der Werth der Grösse u_1 immer in der Weise gewählt werden kann, dass derselbe nicht kleiner als das grösste P und nicht grösser als das kleinste Q erscheint. Nun giebt es laut System (c.) keine Grössen Q, welche kleiner wären als die eine oder andere der Grössen P, — folglich kann jene Bedingung immer erfüllt werden.

Daraus folgt schon, dass die Variablen $u_2, u_3, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots$ alle Werthe annehmen können, welche den Ungleichungen (c.), den Gleichungen (a.) und den von u_1 freien Ungleichungen unter (b.) genügen. Da in Bezug auf das System dieser Relationen die Elimination einer zweiten Variablen u, z. B. u_2, zu ähnlichem Ergebniss führt u. s. w., so ist der oben ausgesprochene Satz bewiesen.

§ 3. *Die Zerlegung eines Grössensystems in zwei andere auf Grundlage einfacher Relationen.*

Es soll das Grössensystem

$$\text{(1.)} \qquad P_1, P_2, \ldots, P_n$$

und das System einfacher Relationen

$$\text{(2.)} \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n} A_{1i} u_i = 0, & \sum_{i=1}^{i=n} A_{2i} u_i = 0, \ldots, & \sum_{i=1}^{i=n} A_{li} u_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{i=n} B_{1i} u_i \geqq 0, & \sum_{i=1}^{i=n} B_{2i} u_i \geqq 0, \ldots, & \ldots \end{cases}$$

gegeben werden.

Ich behaupte: *das Grössensystem* P (1.) *kann immer derart in zwei Componenten* Π *und* $\mathfrak{P}$ *zerlegt werden* ($P_i = \Pi_i + \mathfrak{P}_i$), *dass für die ersteren*

$$(3.) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \Pi_i u_i \geqq 0$$

ist, und dass die letzteren mit willkürlich gewählten negativen Coefficienten $-p$ *multiplicirt den Relationen* (2.) *genügen:*

$$(4.) \quad -\sum_{i=1}^{i=n} A_{1i} p_i \mathfrak{P}_i = 0, \text{ u. s. w.}, \qquad -\sum_{i=1}^{i=n} B_{1i} p_i \mathfrak{P}_i \geqq 0, \text{ u. s. w.}$$

1) Für den Beweis dieser Behauptung setze ich voraus erstens, dass eine jede Gleichung in (2.) unabhängig ist von den übrigen Gleichungen, zweitens, dass aus den Ungleichungen (2.) nicht eine Ungleichung gefolgert werden kann, deren linke Seite identisch verschwindet oder durch die linken Seiten der Gleichungen ausgedrückt werden kann.

Die Relationen (2.) können immer auf eine dieser Voraussetzung entsprechende Form gebracht werden. Denn wenn die zweite Voraussetzung nicht zuträfe, so könnte man gewisse Ungleichungen durch Gleichungen ersetzen (§ 1.) und auf diese Weise die zweite Voraussetzung zu Stande bringen. Die Möglichkeit der ersten Voraussetzung ist evident.

2) Um nun den gedachten Beweis zu liefern, beachten wir, dass die Ungleichung (3.) für alle Lösungen des Systems (2.) bestehen muss. Hieraus ergeben sich für die Componenten Π die Ausdrücke:

$$(5.) \qquad \Pi_i = \sum_{k=1}^{k=l} A_{ki} \lambda_k + \sum_{k=1}^{k=\cdots} B_{ki} \mu_k \qquad (\mu_k \geqq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n).$$

Da $\Pi_i = P_i - \mathfrak{P}_i$, ist also zu beweisen, dass die Componenten $\mathfrak{P}$ ausser den Relationen (4.) auch noch den folgenden Genüge leisten können:

$$(6.) \quad -\mathfrak{P}_i = -P_i + \sum_{k=1}^{k=l} A_{ki} \lambda_k + \sum_{k=1}^{k=\cdots} B_{ki} \mu_k \qquad (\mu_k \geqq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n).$$

Setzt man diese Ausdrücke in (4.) ein, so erhält man Relationen für die Multiplicatoren λ und für die nicht-negativen Multiplicatoren μ, und es ist noch zu zeigen, dass diese Multiplicatoren Werthe erhalten können, durch welche diese Relationen befriedigt werden.

Setzen wir:

$$(7.) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n} A_{ki} A_{hi} p_i \equiv (AA)_{kh}, & \sum_{i=1}^{i=n} A_{ki} B_{hi} p_i \equiv (AB)_{kh} \equiv (BA)_{hk}, \\ & \sum_{i=1}^{i=n} B_{ki} B_{hi} p_i \equiv (BB)_{kh}, \end{cases}$$

so verwandeln sich die Relationen (4.) nach der gedachten Substitution in

$$(8.)\quad \begin{cases} L_h + (AA)_{h1}\lambda_1 + (AA)_{h2}\lambda_2 \\ \qquad + \cdots + (AA)_{hl}\lambda_l + (AB)_{h1}\mu_1 + (AB)_{h2}\mu_2 + \cdots = 0, \\ M_k + (AB)_{1k}\lambda_1 + (AB)_{2k}\lambda_2 \\ \qquad + \cdots + (AB)_{lk}\lambda_l + (BB)_{1k}\mu_1 + (BB)_{2k}\mu_2 + \cdots \geqq 0, \\ \mu_1 \geqq 0,\ \mu_2 \geqq 0, \quad \cdots \end{cases}$$

$(h = 1, 2, \ldots, l, \quad k = 1, 2, \ldots)$.

wo die Glieder L_h und M_k von den Multiplicatoren λ und μ unabhängig sind. Nun können die Multiplicatoren λ als Functionen der Multiplicatoren μ aus dem Systeme der Gleichungen berechnet werden, da die Determinante dieses Systems in Bezug auf die Unbestimmten λ, eine einfache Function von Quadraten mit positiven Coefficienten, wegen der ersten Voraussetzung in 1) nicht verschwindet. Diese Multiplicatoren λ sind vorläufig keinen Beschränkungen unterworfen. Berechnet man daher dieselben aus den Gleichungen als Functionen der Multiplicatoren μ, und substituirt diese Werthe dann in die Ungleichungen, so bleibt zu beweisen, dass die nicht-negativen Multiplicatoren μ den neuen Ungleichungen gemäss bestimmt werden können.

Setzen wir die Determinante:

$$\begin{vmatrix} (BB)_{ki} & (BA)_{k1} & (BA)_{k2} & \cdots & (BA)_{kl} \\ (AB)_{1i} & (AA)_{11} & (AA)_{12} & \cdots & (AA)_{1l} \\ (AB)_{2i} & (AA)_{21} & (AA)_{22} & \cdots & (AA)_{2l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ (AB)_{li} & (AA)_{l1} & (AA)_{l2} & \cdots & (AA)_{ll} \end{vmatrix} \equiv a_{ki},$$

so erhalten wir nach der Substitution:

$$(9.)\quad \begin{cases} N_k + a_{k1}\mu_1 + a_{k2}\mu_2 + \cdots \geqq 0, \quad \mu_1 \geqq 0, \quad \mu_2 \geqq 0, \quad \cdots \end{cases}$$

$(k = 1, 2, \ldots)$.

wo die Glieder N_k von den Multiplicatoren unabhängig sind.

3) Es ist zu beweisen, dass diese Ungleichungen immer erfüllt werden können. — Wenn in dem Ansatze:

$$(10).\quad \begin{cases} a_{k1}\mu_1 + a_{k2}\mu_2 + \cdots \equiv \theta_k \geqq 0, \quad \mu_1 \geqq 0, \quad \mu_2 \geqq 0, \quad \cdots \end{cases}$$

$(k = 1, 2, \ldots)$

keine linke Seite θ in der Weise beschränkt vorkommt, dass dieselbe nur den Werth Null annehmen kann, so können alle linken Seiten θ gleichzeitig grösser als Null sein (III. 2.). Dann können aber die Multiplicatoren μ offenbar so gewählt werden, dass die Ungleichungen (9.) befriedigt werden.

In (10.) ist in der That keine linke Seite θ vorhanden, welche ausschliesslich den Werth Null annehmen kann. Setzt man nämlich voraus, dass in (10.) die linke Seite θ_1 nur den Werth Null annehmen kann, so muss es nicht-negative Multiplicatoren $\nu_1 - 1, \nu_2, \nu_3, \ldots, \varrho_1, \varrho_2, \ldots$ geben, vermöge deren die Identität:

$$\nu_1\theta_1 + \nu_2\theta_2 + \nu_3\theta_3 + \cdots + \varrho_1\mu_1 + \varrho_2\mu_2 + \cdots \equiv 0$$

besteht (§ 1), das heisst:

$$\left.\begin{array}{l} \varrho_1 + \nu_1 a_{11} + \nu_2 a_{21} + \cdots = 0, \\ \varrho_2 + \nu_1 a_{21} + \nu_2 a_{22} + \cdots = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} (\nu_1 \geqq 1,\ \nu_2 \geqq 0,\ \nu_3 \geqq 0,\ \ldots,\ \varrho_1 \geqq 0,\ \varrho_2 \geqq 0,\ \ldots)$$

ist. Multiplicirt man hier die erste Gleichung mit ν_1, die zweite mit ν_2 u. s. w. und addirt, so gelangt man zu einer Gleichung, welche auf folgende Form gebracht werden kann:

$$\nu_1\varrho_1 + \nu_2\varrho_2 + \cdots + \begin{vmatrix} \Sigma\Sigma(BB)_{ki}\nu_k\nu_i & \Sigma(BA)_{k1}\nu_k & \Sigma(BA)_{k2}\nu_k \cdots & \Sigma(BA)_{kl}\nu_k \\ \Sigma(AB)_{1i}\nu_i & (AA)_{11} & (AA)_{12} \cdots & (AA)_{1l} \\ \Sigma(AB)_{2i}\nu_i & (AA)_{21} & (AA)_{22} \cdots & (AA)_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Sigma(AB)_{li}\nu_i & (AA)_{l1} & (AA)_{l2} \cdots & (AA)_{ll} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Determinante ist eine einfache Function von Quadraten mit positiven Coefficienten. Bildet man nämlich aus dem Systeme

$$\left.\begin{array}{llll} \Sigma B_{k1}\nu_k, & A_{11}, & A_{21}, \cdots & A_{l1} \\ \Sigma B_{k2}\nu_k, & A_{12}, & A_{22}, \cdots & A_{l2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Sigma B_{kn}\nu_k, & A_{1n}, & A_{2n} \cdots & A_{ln} \end{array}\right\} (\nu_k \geqq 0),$$

nach den Zeilen alle Determinanten $(l+1)$-ten Grades, quadrirt dann und addirt dieselben mit gewissen positiven Coefficienten versehen, so gelangt man zu dem Determinantengliede der Gleichung. Da nun die Reihe $\nu_1\varrho_1 + \nu_2\varrho_2 + \cdots$ aus lauter nicht-negativen Gliedern besteht, so müssen die erwähnten Quadrate, und hiermit die erwähnten Determinanten $(l+1)$-ten Grades verschwinden. Dies widerspricht aber den Voraussetzungen in 1).

4) Dieser Beweis erstreckt sich aber nicht auf den Fall, dass in (2.) bloss Ungleichungen vorkommen und auch implicite keine Gleichungen darin enthalten sind. In diesem Falle besteht nämlich das System (8.) lediglich aus den Ungleichungen

$$M_k + (BB)_{1k}\mu_1 + (BB)_{2k}\mu_2 + \cdots \geqq 0, \quad \mu_1 \geqq 0, \quad \mu_2 \geqq 0, \quad \ldots \quad .$$
$$(k = 1, 2, \ldots).$$

Behandelt man aber diese Ungleichungen auf dieselbe Weise, wie in 3) die Ungleichungen (9.), so gelangt man zu dem Resultate, dass die Ausdrücke

$$(BB)_{1k}\mu_1 + (BB)_{2k}\mu_2 + \cdots, \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

alle gleichzeitig Werthe über Null haben können, weil widrigenfalls die Summen $\Sigma B_{k1}\nu_k$, $\Sigma B_{k2}\nu_k, \ldots$, wo $\nu_k \geqq 0$, alle gleichzeitig verschwinden könnten, ohne dass alle Multiplicatoren ν_k verschwinden, im Widerspruche mit der gemachten Voraussetzung, dass die gegebenen Ungleichungen implicite keine Gleichungen enthalten sollen; denn multiplicirt man die Gleichungen

$$\Sigma B_{k1}\nu_k = 0, \quad \Sigma B_{k2}\nu_k = 0, \quad \ldots$$

der Reihe nach mit u_1, u_2, u. s. w. und addirt man dann dieselben, so gelangt man zu der Identität

$$\nu_1 \Sigma B_{1i}u_i + \nu_2 \Sigma B_{2i}u_i + \cdots \equiv 0,$$

also zu der Bedingung dafür, dass in dem Systeme der gegebenen Ungleichungen wenigstens eine Gleichung implicite enthalten ist (§ 1.).

§ 4. Die Auseinandersetzungen der vorhergehenden drei Paragraphen stützen sich lediglich auf den Grundsatz der einfachen Relationen (V.). Zu Folge der Beweisführung in (IX.) ***können daher die hier begründeten Sätze auch auf infinitesimale Systeme angewendet werden.***

Ueber die Umformung von geschlossenen Integralen.

(Von Herrn *M. Hamburger.*)

In der bekannten Gleichung

$$(1.) \qquad \int (X dx + Y dy) = \pm \int \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dT,$$

wo das Integral auf der linken Seite über die vollständige Begrenzung eines Flächentheils T, das auf der rechten über diesen Flächentheil selbst ausgedehnt ist, erscheint es, rein analytisch betrachtet, auffallend, dass in dem Flächenintegral $\frac{\partial Y}{\partial x}$ nicht mit demselben Vorzeichen wie $\frac{\partial X}{\partial y}$ behaftet ist, da man doch erwarten sollte, dass mit

$$\int X dx = \pm \int \frac{\partial X}{\partial y} dx dy \quad \text{zugleich} \quad \int Y dy = \pm \int \frac{\partial Y}{\partial x} dx dy$$

sich ergeben müsste.

In den Herleitungen der Gleichung (1.), soweit sie mir bekannt sind, wird lediglich der geometrische Weg eingeschlagen und die Verschiedenheit der Vorzeichen auf die Betrachtung der spitzen oder stumpfen Winkel gegründet, welche die Richtung der wachsenden Begrenzungscurve mit der positiven Richtung der Coordinatenaxen bildet. Es schien indessen von Interesse, die Formel (1.) auf analytischem Wege herzuleiten.

Als Ausgangspunkt dient uns folgende Identität, in der x und y als Functionen zweier neuen Variablen u und v betrachtet werden, während X und Y beliebige Functionen von x und y bedeuten:

$$(2.) \qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial u}\left(X\frac{\partial x}{\partial v} + Y\frac{\partial y}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(X\frac{\partial x}{\partial u} + Y\frac{\partial y}{\partial u}\right) \\ \qquad = -\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right). \end{cases}$$

Es seien nun insbesondere x und y in den Intervallen $u=0$, $u=a$; $v=0$, $v=b$ eindeutige und stetige Functionen von u und v, die in Beziehung auf v für jeden Werth von u die Periode b haben und für $u=0$ von v unabhängig sind.

Die Integration der Ausdrücke auf beiden Seiten der Gleichung (2.) zunächst nach v von $v=0$ bis $v=b$ ergiebt mit Rücksicht darauf, dass $X\frac{\partial x}{\partial u}+Y\frac{\partial y}{\partial u}$ zu Anfang und Ende des Intervalles gleiche Werthe haben.

$$\frac{\partial}{\partial u}\int_0^b\left(X\frac{\partial x}{\partial v}+Y\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv=-\int_0^b\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)dv.$$

Integriren wir vorstehende Gleichung nunmehr nach u von $u=0$ bis $u=a$ und bemerken, dass nach unserer Annahme für $u=0$ $\frac{\partial x}{\partial v}=0$, $\frac{\partial y}{\partial v}=0$ ist, so erhalten wir

$$(3.)\quad \int_0^b\left(X\frac{\partial x}{\partial v}+Y\frac{\partial y}{\partial v}\right)_{u=a}dv=-\int_0^a\int_0^b\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du\,dv.$$

Die vorstehende rein analytische Formel führt, geometrisch interpretirt, auf die Gleichung (1.).

Sei zunächst die von der Curve begrenzte Fläche einfach zusammenhängend, so kann man die rechtwinkligen Coordinaten x, y eines Punktes der Fläche so als Functionen zweier neuen Variablen u, v ausdrücken, dass während v von 0 bis b variirt, für $u=a$ der Punkt die Grenzcurve, und bei abnehmendem u*) ebenfalls in sich zurücklaufende, von einander getrennte Curven durchläuft, bis die Curve für $u=0$ in einen im Innern der Fläche gelegenen Punkt, der zugleich der Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinaten sei, sich zusammenzieht. Es sind dann alle zum Bestehen der Gleichung (3.) erforderlichen Bedingungen erfüllt. Die erwähnte Darstellung kann auf unendlich mannigfaltige Weise geschehen, z. B. folgendermassen:

Die Grenzcurve sei in rechtwinkligen Coordinaten, in Bezug auf einen Punkt im Innern als Urspung, durch die Gleichung gegeben $x=f(v)$, $y=\varphi(v)$, so dass jedem Werthe von v nur ein Werthepaar x, y entspricht und $f(v+b)=f(v)$, $\varphi(v+b)=\varphi(v)$ ist; dann können die Punkte der begrenzten Fläche eindeutig dargestellt werden durch:

*) Zur bestimmteren Vorstellung nehmen wir a und b positiv an.

$$x = \frac{u}{a} f(v), \qquad y = \frac{u}{a} \varphi(v);$$

$u = a$ entspricht die Grenzcurve, $u = c\,(c < a)$ die Zwischencurven und $u = 0$ der Nullpunkt des Coordinatensystems, der nach der Voraussetzung im Innern der Fläche liegt, für ihn ist $\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial v} = 0$. Constanten Werthen von v entsprechen gerade Linien, die sämmtlich vom Ursprung ausgehen. Die Curven, die constanten Werthen von u entsprechen, sind ähnlich zu einander gelegen, und zwar wird die Curve $u = c$ von der Curve $u = c'$ umschlossen, falls $c' > c$ ist.

Die linke Seite von (3.) stellt das Integral über die Grenzcurve dar, der Ausdruck $\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) du\,dv$ im Doppelintegrale giebt aber absolut genommen das Flächenelement dT, nämlich den Inhalt des unendlich kleinen Parallelogramms, gebildet von den Curven (u), (v), $(u + du)$, $(v + dv)$ als das Doppelte des Dreiecks, dessen Ecken die rechtwinkligen Coordinaten

$$x,\ y; \qquad x + \frac{\partial x}{\partial u} du,\quad y + \frac{\partial y}{\partial u} du; \qquad x + \frac{\partial x}{\partial v} dv,\quad y + \frac{\partial y}{\partial v} dv$$

haben. Daraus folgt also die Gleichung (1.). Das Vorzeichen bestimmt sich nach (3.) so, dass es positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem $\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$ negativ oder positiv ist. Das Letztere wird der Fall sein, wenn die Richtungen der wachsenden u und der wachsenden v, oder die der wachsenden v und der abnehmenden u in demselben Sinne auf einander folgen, wie die positive X-Axe zur positiven Y-Axe.

In gleicher Weise kann der Satz von *Stoke*, wonach das Integral über eine geschlossene Raumcurve in ein Integral über eine beliebige von ihr begrenzte krumme Fläche transformirt wird, auf analytischem Wege hergeleitet werden.

Zu dem Ende betrachten wir den Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(X\frac{\partial x}{\partial v} + Y\frac{\partial y}{\partial v} + Z\frac{\partial z}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(X\frac{\partial x}{\partial u} + Y\frac{\partial y}{\partial u} + Z\frac{\partial z}{\partial u}\right),$$

worin X, Y, Z beliebige Functionen von x, y, z bedeuten und x, y, z als Functionen des Orts einer Fläche durch zwei Variable u und v dargestellt sind. Mit Rücksicht auf die Identitäten

$$\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial X}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)-\frac{\partial X}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial Y}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)-\frac{\partial Y}{\partial z}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial Z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)-\frac{\partial Z}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

erhält man

$$(4.)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial u}\left(X\dfrac{\partial x}{\partial v}+Y\dfrac{\partial y}{\partial v}+Z\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)-\dfrac{\partial}{\partial v}\left(X\dfrac{\partial x}{\partial u}+Y\dfrac{\partial y}{\partial u}+Z\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)= \\ \qquad -\left(\dfrac{\partial Y}{\partial z}-\dfrac{\partial Z}{\partial y}\right)\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}-\left(\dfrac{\partial Z}{\partial x}-\dfrac{\partial X}{\partial z}\right)\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}-\left(\dfrac{\partial X}{\partial y}-\dfrac{\partial Y}{\partial x}\right)\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}, \end{array}\right.$$

wo

$$\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial(u,v)}=\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial\beta}{\partial v}-\frac{\partial\beta}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial v}$$

gesetzt ist.

Es seien nun x, y, z solche Functionen von u und v, die im Gebiete $u=0,\ u=a;\ v=0,\ v=b$ eindeutig und stetig sind, und für jedes u in Beziehung auf v die Periode b haben und für $u=0$ von v unabhängig sind, so dass für $u=0$ $\dfrac{\partial x}{\partial v}=\dfrac{\partial y}{\partial v}=\dfrac{\partial z}{\partial v}=0$ ist. Dann folgt aus Gleichung (4.), wenn man ihre beiden Seiten erst nach v von $v=0$ bis $v=b$, dann nach u von $u=0$ bis $u=a$ integrirt,

$$(5.)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^b\left(X\frac{\partial x}{\partial v}+Y\frac{\partial y}{\partial v}+Z\frac{\partial z}{\partial v}\right)_{u=a}dv \\ \displaystyle=-\int_0^a\int_0^b\left\{\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right)\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right)\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right. \\ \qquad\qquad\left.+\left(\dfrac{\partial X}{\partial y}-\dfrac{\partial Y}{\partial x}\right)\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right\}du\,dv. \end{array}\right.$$

Diese Relation giebt in analytischer Form den Satz von *Stoke*. Denken wir uns nämlich von der Raumcurve eine einfach zusammenhängende krumme Fläche begrenzt und die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z der Punkte der Fläche in der Weise eindeutig durch zwei Variable u und v bestimmt, dass constanten Werthen von u geschlossene Curven entsprechen, die einander umschliessen, dem Werthe $u=a$ die Begrenzungscurve, dem Werthe $u=0$ ein im Innern gelegener Punkt entspricht, so sind die angegebenen Bedingungen erfüllt. Die linke Seite von (5.) stellt dann das

Begrenzungsintegral dar. Ein Flächenelement $d\sigma$ begrenzt von den Curven (u), $(u+du)$, (v), $(v+dv)$ hat zur absoluten Grösse

$$d\sigma = \sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}\, du\,dv = l\,du\,dv,$$

und nennt man λ, μ, ν die Winkel, welche die Normale der Fläche im Punkte u, v mit den Coordinatenaxen bilden, so gelten die Gleichungen:

$$\cos\lambda\,\frac{\partial x}{\partial u} + \cos\mu\,\frac{\partial y}{\partial u} + \cos\nu\,\frac{\partial z}{\partial u} = 0,$$

$$\cos\lambda\,\frac{\partial x}{\partial v} + \cos\mu\,\frac{\partial y}{\partial v} + \cos\nu\,\frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

und daraus folgt

$$\cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} : \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} : \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},$$

und da $\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$,

$$\cos\lambda = \pm\frac{1}{l}\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \qquad \cos\mu = \pm\frac{1}{l}\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \qquad \cos\nu = \pm\frac{1}{l}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

Die beiden Vorzeichen treten hier auf, weil die Normale nach beiden Seiten der Fläche gerichtet sein kann. Es ist demnach

$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\,du\,dv = \pm\,d\sigma\cos\lambda =$ der Projection von $d\sigma$ auf die yz-Ebene,

$\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\,du\,dv = \pm\,d\sigma\cos\mu =$ „ „ „ „ „ „ zx-Ebene,

$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv = \pm\,d\sigma\cos\nu =$ „ „ „ „ „ „ xy-Ebene,

und die Gleichung (5.) geht über in

$$\int X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \mp\int\left\{\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right)\cos\lambda + \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right)\cos\mu + \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right)\cos\nu\right\} d\sigma,$$

welches der *Stokes*sche Satz ist.

Das obere Vorzeichen ist zu nehmen, wenn über die Richtung der positiven Normale so bestimmt ist, dass die der wachsenden Normale zu den Richtungen der wachsenden u und der wachsenden v liegt, wie die positive x-Axe zur positiven y-Axe zur positiven z-Axe.

Ist die Fläche geschlossen, dann reducirt sich die Begrenzungscurve auf einen Punkt, sodass für $u = a$ $\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial v} = 0$ ist, und man erhält

also

$$\int\left\{\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right)\cos\lambda+\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right)\cos\mu+\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)\cos\nu\right\}d\sigma=0,$$

das Integral über eine geschlossene Strecke erstreckt.

Hier wie beim Integrale längs der ebenen Curve haben wir vorausgesetzt, dass die begrenzten Flächen einfach zusammenhängende Flächen sind. Ist die Fläche mehrfach zusammenhängend, so zerlegt man sie durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende. Berücksichtigt man, dass beim Curvenintegrale die Querschnitte zweimal im entgegengesetzten Sinne durchlaufen werden und daher die von ihnen gelieferten Beiträge für die Integration sich aufheben, so erkennt man, dass die obigen Sätze für jede Fläche gelten, die von einer oder mehreren Curven vollständig begrenzt ist.

Es ist übrigens leicht zu sehen, wie die Formeln (3.) und (5.) auf den Fall von n Variablen auszudehnen sind, wo es sich handelt, das Integral $\int(X_1dx_1+X_2dx_2+\cdots+X_ndx_n)$ über ein eindimensionales Gebilde in ein über das von demselben begrenzte zweidimensionale Gebiet umzuformen.

Zur Umformung von Flächenintegralen in räumliche Integrale nehmen wir an, dass x, y, z Functionen dreier anderen Variablen u, v, w seien und X, Y, Z Functionen von $x, y, z,$ und führen ein

$$U=X\frac{\partial(y,z)}{\partial(v,w)}+Y\frac{\partial(z,x)}{\partial(v,w)}+Z\frac{\partial(x,y)}{\partial(v,w)},$$
$$V=X\frac{\partial(y,z)}{\partial(w,u)}+Y\frac{\partial(z,x)}{\partial(w,u)}+Z\frac{\partial(x,y)}{\partial(w,u)},$$
$$W=X\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+Y\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+Z\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

Dann gilt die Identität

$$\frac{\partial U}{\partial u}+\frac{\partial V}{\partial v}+\frac{\partial W}{\partial w}=\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}, \tag{6.}$$

wo

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v}\\ \frac{\partial x}{\partial w}, & \frac{\partial y}{\partial w}, & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}$$

gesetzt ist.

Es mögen nun insbesondere x, y, z in Beziehung auf w für beliebige Werthe von u und v die Periode c haben, ferner für $v = 0$ und $v = b$ von w unabhängig sein und endlich für $u = 0$ von v und w unabhängig sein. Die Integration der Gleichung (6.) nach w von 0 bis c ergiebt dann, da W für $w = 0$ und $w = c$ denselben Werth annimmt,

$$\int_0^c \left(\frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial v}\right) dw = \int_0^c \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v, w)}\, dw.$$

Integrirt man jetzt nach v von 0 bis b, und bemerkt, dass für $v = 0$ und $v = b$, da gleichzeitig $\frac{\partial x}{\partial w} = 0$, $\frac{\partial y}{\partial w} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial w} = 0$ ist, auch V verschwindet, so erhält man

$$\int_0^b \int_0^c \frac{\partial U}{\partial u}\, dv\, dw = \int_0^b \int_0^c \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v, w)}\, dv\, dw.$$

Integrirt man endlich noch in Beziehung auf u von 0 bis a und berücksichtigt, dass U für $u = 0$ verschwindet, so folgt

$$\int_0^b \int_0^c (U)_{u=a}\, dv\, dw = \int_0^a \int_0^b \int_0^c \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v, w)}\, du\, dv\, dw$$

oder

$$(7.) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^b \int_0^c \left(X \frac{\partial (y, z)}{\partial (v, w)} + Y \frac{\partial (z, x)}{\partial (v, w)} + Z \frac{\partial (x, y)}{\partial (v, w)}_{u=a}\right) dv\, dw \\ &= \int_0^a \int_0^b \int_0^c \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v, w)}\, du\, dv\, dw. \end{aligned} \right.$$

Zur geometrischen Uebertragung dieser Formel denke man sich einen durch eine geschlossene Oberfläche begrenzten, einfach zusammenhängenden Raum, und die Punkte der Grenzfläche durch zwei Variable v, w in der Weise bestimmt, dass constanten Werthen von v geschlossene, von einander getrennte Curven entsprechen, die für $v = 0$ und $v = b$ sich in Punkte zusammenziehen. Die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte des begrenzten Raumes, bezogen auf einen Punkt im Innern als Coordinatenursprung, können dann in der Form gegeben werden

$$x = \frac{u}{a} f(v, w), \quad y = \frac{u}{a} \varphi(v, w), \quad z = \frac{u}{a} \psi(v, w),$$

wo $x = f(v, w)$, $y = \varphi(v, w)$, $z = \psi(v, w)$ ($u = a$ entsprechend) die Punkte

der Grenzfläche darstellen, mit der Bestimmung, dass $f(v, w+c) = f(v, w)$, $\varphi(v, w+c) = \varphi(v, w)$, $\psi(v, w+c) = \psi(w)$; ferner $\frac{\partial f}{\partial w} = \frac{\partial \varphi}{\partial w} = \frac{\partial \psi}{\partial w} = 0$ für $v = 0$ und $v = b$. Den Werthen $u = \alpha$, $0 < \alpha < c$ entsprechen geschlossene Oberflächen, die zur Grenzfläche ähnlich gelegen sind, und zwar derart, dass, wenn $\alpha' > \alpha$ die Fläche $u = \alpha$ von der Fläche $u = \alpha'$ umschlossen wird. Für $u = 0$ geht die Fläche in den Anfangspunkt der Coordinaten über. Hiermit erfüllen x, y, z alle zum Bestehen der Relation (7.) erforderlichen Bedingungen. Die linke Seite kann in Berücksichtigung, dass x, y, z für $u = a$ die Punkte der Grenzfläche darstellen, wenn $d\sigma$ das Element der Grenzfläche und λ, μ, ν die Winkel der Normale mit den Coordinatenaxen bezeichnen, nach dem Früheren geschrieben werden:

$$\int (X \cos \lambda + Y \cos \mu + Z \cos \nu)\, d\sigma,$$

die Integration über die Grenzfläche erstreckt.

Der Ausdruck

$$\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v, w)}\, du\, dv\, dw$$

liefert, absolut genommen, das Volumelement des Raumes $d\tau$. Zieht man nämlich vom Punkte x, y, z drei Kanten von unendlich kleiner Länge, gerichtet nach den wachsenden u, v, w, so haben die Endpunkte derselben die Coordinaten

$$\begin{aligned}
&x + \frac{\partial x}{\partial u} du, \quad && y + \frac{\partial y}{\partial u} du, \quad && z + \frac{\partial z}{\partial u} du, \\
&x + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \quad && y + \frac{\partial y}{\partial v} dv, \quad && z + \frac{\partial z}{\partial v} dv, \\
&x + \frac{\partial x}{\partial w} dw, \quad && y + \frac{\partial x}{\partial w} dw, \quad && z + \frac{\partial z}{\partial w} dw.
\end{aligned}$$

Der Inhalt des dieses Dreikant vervollständigenden Parallelopipeds ist $\pm \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v, w)}\, du\, dv\, dw$. Demnach erhalten wir aus (7.)

$$\int (X \cos \lambda + Y \cos \mu + Z \cos \nu)\, d\sigma = \pm \int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) d\tau,$$

die Integration rechts über den begrenzten Raum erstreckt. Das obere oder untere Vorzeichen bestimmt sich durch das des Quotienten

$$\frac{\partial (y, z)}{\partial (v, w)} : \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v, w)}.$$

Die Identität (6.) führt übrigens, wenn X, Y, Z die partiellen Differentialquotienten einer Function φ nach x, y, z sind, unmittelbar zur Transformation des Ausdruckes $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ in die neuen Coordinaten u, v, w. Es ist nämlich dann

$$U=\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x}, & \frac{\partial\varphi}{\partial y}, & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w}, & \frac{\partial y}{\partial w}, & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}, \quad V=\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x}, & \frac{\partial\varphi}{\partial y}, & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial w}, & \frac{\partial y}{\partial w}, & \frac{\partial z}{\partial w} \\ \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \end{vmatrix}, \quad W=\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x}, & \frac{\partial\varphi}{\partial y}, & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

also

$$(8.)\quad \begin{cases} U\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u}, & \frac{\partial\varphi}{\partial v}, & \frac{\partial\varphi}{\partial w} \\ e_{21}, & e_{22}, & e_{23} \\ e_{31}, & e_{32}, & e_{33} \end{vmatrix}=A, \quad V\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u}, & \frac{\partial\varphi}{\partial v}, & \frac{\partial\varphi}{\partial w} \\ e_{31}, & e_{32}, & e_{33} \\ e_{11}, & e_{12}, & e_{13} \end{vmatrix}=B, \\ W\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u}, & \frac{\partial\varphi}{\partial v}, & \frac{\partial\varphi}{\partial w} \\ e_{11}, & e_{12}, & e_{13} \\ e_{21}, & e_{22}, & e_{23} \end{vmatrix}=C, \end{cases}$$

wenn man setzt

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=e_{11}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w}=e_{23}=e_{32},$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=e_{22}, \qquad \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial u}=e_{31}=e_{13},$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2=e_{33}, \qquad \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=e_{12}=e_{21}.$$

Zugleich ist

$$(9.)\qquad \left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right)^2=\Sigma\pm e_{11}e_{22}e_{33}=\Delta.$$

Hiernach folgt aus (6.) die gesuchte Transformationsformel in der Gestalt

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left\{\frac{\partial\frac{A}{\sqrt{\Delta}}}{\partial u}+\frac{\partial\frac{B}{\sqrt{\Delta}}}{\partial v}+\frac{\partial\frac{C}{\sqrt{\Delta}}}{\partial w}\right\},$$

wo A, B, C und Δ die oben in (8.) und (9.) angegebene Bedeutung haben. Als Quotienten der ersten und zweiten Ableitungen von φ nach u, v und w auf der rechten Seite erscheinen nur Functionen der e_{ik} und ihrer ersten Ableitungen. Die e_{ik} sind übrigens unmittelbar durch den Ausdruck des Quadrats des Linienelements in den neuen Coordinaten gegeben, da

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 =$$

$$e_{11}\,du^2 + e_{22}\,dv^2 + e_{33}\,dw^2 + 2\,e_{23}\,dv\,dw + 2\,e_{31}\,dw\,du + 2\,e_{12}\,du\,dv$$

ist.

Ueber das *Gauss*sche Pentagramma mirificum.

(Von Herrn *Ludwig Schlesinger* in Klausenburg.)

In dem von *Schering* herausgegebenen *Gauss*schen Nachlasse (Werke, Bd. III, S. 481 ff.) wird als *Pentagramma mirificum* ein sphärisches Pentagon behandelt, welches (vergl. a. a. O. S. 495) dahin charakterisirt werden kann, dass seine fünf Diagonalen Quadranten sind. *Gauss* gelangt zu dem Ergebnisse, dass die Bestimmung der Ecken eines solchen Pentagons von der Fünftheilung der elliptischen Functionen abhängt.

Da das *Poncelet*sche Schliessungsproblem im Falle eines Fünfecks auf die Verfünffachung der elliptischen Functionen führt, ist es von vornherein wahrscheinlich, dass zwischen diesem Probleme und dem Pentagramma mirificum ein Zusammenhang besteht; da ferner die charakteristische Eigenschaft des Pentagramma bei einer beliebigen Biegung der Kugel erhalten bleibt, liegt es nahe, statt der Kugel eine beliebige Fläche von constantem positivem Krümmungsmaasse zu Grunde zu legen. Da, wie es scheint, diese beiden Gesichtspunkte bisher noch nicht hervorgehoben worden sind, und namentlich die Durchführung des letzteren zu einigen Formeln führt, die auch für anderweitige Untersuchungen von Interesse sein könnten, möge es erlaubt sein, in der vorliegenden Note einige auf das Pentagramma bezügliche Entwicklungen zusammenzustellen.*)

*) Diese Notiz wurde am 19. Juni 1899 der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vorgelegt und in deren Berichten (Értesitö, Bd. XVII, S. 526 ff.) in magyarischer Sprache veröffentlicht.

I.

Wir legen, wie bereits bei einer früheren Gelegenheit,*) für eine Fläche vom constanten Krümmungsmaasse k den Ausdruck

$$ds = 2\sqrt{\frac{dp^2 + dq^2}{(p^2+q^2+k)^2}}$$

des Linienelementes zu Grunde, dann werden die geodätischen Linien durch die Gleichung **)

$$\mathfrak{a}(p^2+q^2-k) + 2\mathfrak{b}p + 2\mathfrak{c}q = 0, \tag{1.}$$

wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ willkürliche Constanten bedeuten, dargestellt.

Durch einfache Rechnung findet man, dass die zwischen zwei Punkten mit den Coordinaten (p_1, q_1), (p_2, q_2) gemessene Bogenlänge $s_{1,2}$ der durch diese Punkte gelegten geodätischen Linie (der geodätische Abstand der beiden Punkte) durch die Formel

$$\cos\sqrt{k}\,s_{1,2} = \frac{(k-p_1^2-q_1^2)(k-p_2^2-q_2^2) + 4k(p_1p_2+q_1q_2)}{(k+p_1^2+q_1^2)(k+p_2^2+q_2^2)}$$

gegeben wird, und hiernach erscheint es zweckmässig neben p, q noch

$$t = \frac{1}{2\sqrt{k}}(k-p^2-q^2) \tag{2.}$$

als Homogeneitätscoordinate einzuführen, wodurch, wenn

$$t_1 = \frac{1}{2\sqrt{k}}(k-p_1^2-q_1^2),$$

$$t_2 = \frac{1}{2\sqrt{k}}(k-p_2^2-q_2^2),$$

gesetzt wird, der obige Ausdruck die elegante Gestalt

$$\cos\sqrt{k}\,s_{1,2} = \frac{p_1p_2+q_1q_2+t_1t_2}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+t_1^2}\,\sqrt{p_2^2+q_2^2+t_2^2}} \tag{3.}$$

annimmt, wie man mit Rücksicht auf die Identität

$$4k(t^2+p^2+q^2) = (k+p^2+q^2)^2$$

leicht erkennt.

Da die Quotienten

$$\frac{p}{t}, \quad \frac{q}{t}$$

---

*) Dieses Journal, Bd. 121, S. 168 ff.

**) a. a. O. S. 172, Gleichung (2.).

im wesentlichen mit den sogenannten *Beltrami*schen Coordinaten übereinstimmen, wollen wir (p, q, t) als *homogene Beltramische Coordinaten* bezeichnen.

Der Uebergang von dem Coordinatensysteme (p, q) zu einem ebenso beschaffenen (p', q') d. h. zu einem solchen, in welchem der Ausdruck für das Linienelement wieder

$$2\sqrt{\frac{dp'^2+dq'^2}{(p'^2+q'^2+k)^2}}$$

ist, entspricht einer *Verschiebung* der Fläche in sich selbst, also (vergl. a. a. O. S. 174) einer auf die complexe Grösse

$$\eta = p + qi$$

auszuübenden projectiven Substitution, die den Ausdruck

$$p^2 + q^2 + k$$

von einem positiven Factor abgesehen, ungeändert lässt. Interpretiren wir (p, q) als rechtwinklige Coordinaten in einer Ebene, so lässt sich bekanntlich jede projective Substitution von η als Aufeinanderfolge zweier *Spiegelungen* in Bezug auf Kreise dieser Ebene darstellen.*)

Wenn diese beiden Kreise insbesondere den Kreis

$$p^2 + q^2 + k = 0$$

rechtwinklig schneiden, so ist die resultirende projective Substitution eine Verschiebung in dem angegebenen Sinne (vergl. mein „Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen“ Bd. II, 2, S. 87). Eine Spiegelung in Bezug auf einen solchen Kreis, d. h. in Bezug auf einen Kreis, dessen Gleichung die Form (1.) oder, wie wir jetzt mit nicht in Betracht kommender Beschränkung der Allgemeinheit schreiben wollen,

$$p^2+q^2-k+2\alpha p+2\beta q = 0$$

besitzt, wird durch die Formeln

$$p'+\alpha = (p+\alpha)\frac{k+\alpha^2+\beta^2}{(p+\alpha)^2+(q+\beta)^2},$$

$$q'+\beta = (q+\beta)\frac{k+\alpha^2+\beta^2}{(p+\alpha)^2+(q+\beta)^2},$$

dargestellt. Diese Formeln lassen sich in homogenen *Beltrami*schen Coordinaten so schreiben

*) *Poincaré,* Acta Mathem. Bd. III, S. 51.

$$(4.)\qquad \begin{cases} \varrho p' = \dfrac{k+\beta^2-\alpha^2}{\sqrt{k+\alpha^2+\beta^2}}\,p - \dfrac{2\alpha\beta}{\sqrt{k+\alpha^2+\beta^2}}\,q + \dfrac{2\alpha\sqrt{k}}{\sqrt{k+\alpha^2+\beta^2}}\,t, \\ \varrho q' = \dfrac{-2\alpha\beta}{\sqrt{k+\alpha^2+\beta^2}}\,p + \dfrac{k+\alpha^2-\beta^2}{\sqrt{k+\alpha^2+\beta^2}}\,q + \dfrac{2\beta\sqrt{k}}{\sqrt{k+\alpha^2+\beta^2}}\,t, \\ \varrho t' = \dfrac{2\alpha\sqrt{k}}{\sqrt{k+\alpha^2+\beta^2}}\,p + \dfrac{2\beta\sqrt{k}}{\sqrt{k+\alpha^2+\beta^2}}\,q + \dfrac{\alpha^2+\beta^2-k}{\sqrt{k+\alpha^2+\beta^2}}\,t, \end{cases}$$

woselbst

$$\varrho = \frac{\sqrt{k+\alpha^2+\beta^2}}{(p+\alpha)^2+(q+\beta)^2},$$

$$t' = \frac{1}{2\sqrt{k}}(k-p'^2-q'^2)$$

gesetzt wurde. Die rechten Seiten von (4.) liefern eine symmetrische orthogonale Substitution mit der Determinante -1, und zwar gleich in der Form, die sich aus der bekannten *Euler*schen Parameterdarstellung (vergl. z. B. ***Baltzer,*** Determinanten, 5. Aufl., S. 194) durch Specialisirung ergiebt.

Durch Composition zweier Substitutionen von der Form (4.) erhalten wir demnach die allgemeinste Transformation eines Systems homogener *Beltrami*scher Coordinaten in ein anderes, oder q. i. e. die Darstellung der allgemeinsten Verschiebung der Fläche vom constanten Krümmungsmaasse k in sich selbst. Da diese für die Quotienten

$$\frac{p}{t},\quad \frac{q}{t}$$

offenbar eine projective Substitution ist und überdies nur die Bedingung zu erfüllen hat, dass sie den Kreis

$$p^2+q^2+k=0$$

oder

$$p^2+q^2+t^2=0$$

nicht verändert, so erkennt man a priori, dass diese Transformation, abgesehen von einem Proportionalitätsfactor, einer auf p, q, t auszuübenden orthogonalen Transformation u. z. der allgemeinsten solchen Transformation gleich kommen muss. Dies kann man auch aus den Formeln (4.) direct verificiren und erkennt zugleich, dass die resultirende orthogonale Transformation die Determinante 1 besitzt; das letztere hängt mit dem Umstande zusammen, dass (vergl. z. B. Handbuch, Bd. II, 2, S. 90) eine projective Substitution von $p+qi$, die sich aus Spiegelungen von der Art wie (4.)

zusammensetzt, stets eine *positive* ist. Wir fassen dies letztere Ergebniss in den folgenden Satz*):

Eine Verschiebung der Fläche vom constanten Krümmungsmaasse k stellt sich in homogenen Beltramischen Coordinaten in der Form

$$(5.)\qquad \begin{cases} \varrho\, p' = \alpha_{11} p + \alpha_{12} q + \alpha_{13} t, \\ \varrho\, q' = \alpha_{21} p + \alpha_{22} q + \alpha_{23} t, \\ \varrho\, t' = \alpha_{31} p + \alpha_{32} q + \alpha_{33} t, \end{cases}$$

dar, wo die (α_{ik}) *die Elemente einer orthogonalen Transformation mit der Determinante* $+1$ *bedeuten, und*

$$\varrho^2 = \frac{p^2 + q^2 + t^2}{p'^2 + q'^2 + t'^2}$$

ist; eine Spiegelung in Bezug auf eine geodätische Linie

$$p^2 + q^2 - k + 2\alpha p + 2\beta q = 0$$

entspricht dagegen der symmetrischen orthogonalen Transformation (4.) *mit der Determinante* -1.

Dieser Satz ist von Wichtigkeit, wenn man in einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren homogene Monodromiegruppe eine aus den Elementen eines Fundamentalsystems und seinen conjugirten Werthen gebildete bilineare Form ungeändert lässt, den realen Theil und den Coefficienten von i des Integralquotienten gesondert untersucht. Ich hoffe darauf bei anderer Gelegenheit zurückkommen zu können.

II.

Es sei nun die Krümmung k unserer Fläche gleich Eins. Wir nehmen auf derselben fünf Punkte

$$(p_i,\ q_i,\ t_i) \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

von der Beschaffenheit, dass die Diagonalen des von diesen Punkten gebildeten Pentagons Quadranten sind; d. h. also, wenn (i, k) den geodätischen Abstand der durch die Coordinatenindices i, k charakterisirten Punkte bedeutet, so ist

$$(i, i+2) = \frac{\pi}{2} \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5),$$

*) vergl. *H. Weber*, Algebra, Bd. II (1899), S. 249 ff. (Nachträgliche Bemerkung).

wo die Indices, wie auch stets im Folgenden, modulo 5 zu reduciren sind. Mit Rücksicht auf die Formel (3.) der Nr. I. haben wir demnach

(1.) $$p_i p_{i+2} + q_i q_{i+2} + t_i t_{i+2} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Ein solches Fünfeck nennen wir mit *Gauss* ein *Pentagramma mirificum.*

Interpretiren wir (p, q, t) als homogene *Cartesius*sche Coordinaten in einer Ebene, so besagen die Gleichungen (1.), dass die fünf Punkte

$$(p_i, q_i, t_i) \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

ein *Polfünfeck* in Bezug auf den Kegelschnitt C,

$$p^2 + q^2 + t^2 = 0$$

constituiren, d. h. ein Fünfeck, dessen jede Seite die Polare der gegenüberliegenden Ecke ist. Legen wir durch die fünf Punkte einen Kegelschnitt C_1 und construiren dessen Polarfigur C_2 in Bezug auf C, so ist das betrachtete Fünfeck dem Kegelschnitte C_1 eingeschrieben und dem Kegelschnitte C_2 umschrieben. Das heisst:

Einem Pentagramma mirificum entspricht stets ein ebenes Ponceletsches Schliessungsproblem für den Fall eines Fünfecks.)*

Die Kegelschnitte C_1, C_2 haben die Eigenschaft, dass die Gleichung des einen in Punktcoordinaten mit der Gleichung des anderen in Liniencoordinaten übereinstimmt, sie werden also simultan auf ihre Hauptaxen transformirt. Gehen wir nun von (p, q, t) zu einem anderen Systeme (u, v, w) homogener *Beltrami*scher Coordinaten über, d. h. setzen wir (u, v, w) proportional den rechten Seiten einer orthogonalen Transformation der (p, q, t), so können wir diese orthogonale Transformation in sehr bekannter Weise so einrichten, dass die Gleichung des Kegelschnitts C_1 in (u, v, w) die Form

$$s_1 u^2 + s_2 v^2 + s_3 w^2 = 0$$

erhält, die Gleichung von C_2 lautet dann:

$$s_2 s_3 u^2 + s_3 s_1 v^2 + s_1 s_2 w^2 = 0.$$

Die eventuell möglichen singulären Fälle lassen wir der Einfachheit wegen bei Seite.

---

*) Vergl. *Gundelfinger*, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte (1895), S. 423, auf welche Stelle Herr *Gundelfinger* mich während der Drucklegung der vorliegenden Note (9. I. 00) aufmerksam zu machen die Güte hatte; ferner die „Bemerkungen zu den elf Pentagramma-Fragmenten" des Herrn *Fricke* in dem 1900 ausgegebenen Bd. VIII von *Gauss*' Werken, S. 112 ff. (Nachträgliche Bemerkung).

Da wir es naturgemäss in C_1 mit einem realen Kegelschnitte zu thun haben, sind von den Grössen s_1, s_2, s_3 etwa zwei positiv, die dritte negativ; sei die Bezeichnung so gewählt, dass

$$s_3 < 0, \quad s_1 > 0, \quad s_2 > 0.$$

Wir schreiben dann die Gleichungen von C_1, C_2 in der Form

$$\frac{u^2}{A^2} + \frac{v^2}{B^2} - w^2 = 0,$$
$$A^2u^2 + B^2v^2 - w^2 = 0,$$

und können offenbar ohne dadurch die Allgemeinheit wesentlich einzuschränken

$$A > B > 1$$

voraussetzen. C_1, C_2 sind dann concentrische und coaxiale Ellipsen, von denen C_2 ganz innerhalb C_1 liegt.

Führen wir in der bei der Behandlung des Schliessungsproblems gebräuchlichen Weise*) die zu der Ellipse C_1 gehörige excentrische Anomalie φ durch die Gleichungen

$$u = w A \cos\varphi,$$
$$v = w B \sin\varphi$$

ein und bezeichnen durch φ_i den dem Punkte (p_i, q_i, t_i) entsprechenden Werth von φ, so lauten die den Gleichungen (1.) entsprechenden Gleichungen zwischen den neuen Coordinaten der fünf Punkte:

$$(2.) \qquad A^2 \cos\varphi_i \cos\varphi_{i+2} + B^2 \sin\varphi_i \sin\varphi_{i+2} + 1 = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Man kann diesen Gleichungen auch die von *Jacobi***) benutzte Form geben, indem man an Stelle von φ_{i+2} die der Ellipse C_2 entsprechende excentrische Anomalie

$$\psi_{i+2} = \pi + \varphi_{i+2}$$

desjenigen Punktes von C_2 einführt, in welchem die der Ecke (p_i, q_i, t_i) des Fünfecks gegenüberliegende Seite den Kegelschnitt C_2 berührt; wir wollen aber der Einfachheit wegen die Form (2.) beibehalten.

Verbindet man mit der Gleichung (2.) die in demselben Systeme enthaltene Gleichung

$$A^2 \cos\varphi_{i+2} \cos\varphi_{i-1} + B^2 \sin\varphi_{i+2} \sin\varphi_{i-1} + 1 = 0,$$

---

*) *Rosanes* und *Pasch*, dieses Journal Bd. 64, S. 129.

**) Werke, Bd. I, S. 284.

so erhält man durch Elimination die von *Gauss**) aufgestellten Relationen

$$-B^2 \sin \varphi_{i+2} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\varphi_{i-1}+\varphi_i)}{\cos \frac{1}{2}(\varphi_i-\varphi_{i-1})},$$

$$-A^2 \cos \varphi_{i+2} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\varphi_{i-1}+\varphi_i)}{\cos \frac{1}{2}(\varphi_i-\varphi_{i-1})},$$

woraus sich durch Division die von *Jacobi* bei der Behandlung des Schliessungsproblems**) angewandte Gleichung

$$\text{(3.)} \qquad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varphi_i+\varphi_{i-1}) = \frac{B^2}{A^2} \operatorname{tg} \varphi_{i+2}$$

ergiebt. Setzt man nunmehr***)

$$k^2 = \frac{A^4-B^4}{A^4-1} < 1,$$

$$x = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \varphi = \operatorname{am} x,$$

$$\frac{1}{A^4} = \cos^2 \operatorname{am} \tau, \quad \frac{B^4}{A^4} = 1-k^2 \sin^2 \operatorname{am} \tau,$$

$$\varphi_i = \operatorname{am} x_i, \qquad (i=1,2,3,4,5)$$

so nimmt die Gleichung (3.) die Form an:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\operatorname{am} x_i + \operatorname{am} x_{i-1}) = \Delta \operatorname{am} \tau \ \operatorname{tg} \operatorname{am} x_{i+2},$$

und hieraus folgt wie bei *Jacobi* durch Vergleichung mit der aus der Theorie der elliptischen Functionen bekannten Formel

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\operatorname{am} x + \operatorname{am}(x+2\tau)) = \Delta \operatorname{am} \tau \ \operatorname{tg} \operatorname{am}(t+\tau)$$

die Darstellung:

$$\varphi_{i-1} = \operatorname{am}(x_i+2\tau), \quad \varphi_{i+2} = \operatorname{am}(x_i+\tau),$$

also abgesehen von Vielfachen von 2π,

$$\varphi_{2i+1} = \operatorname{am}(x_1+i\tau) \qquad (i=0,1,2,3,4,5).$$

Nehmen wir um die Vorstellung zu fixiren an, dass das betrachtete Fünfeck ein convexes sei, so hat man, wenn man die Ecken in der Reihenfolge

$$1,\ 3,\ 5,\ 2,\ 4,\ 1$$

durchläuft, die excentrische Anomalie φ_1 um 4π vermehrt, es ist also

$$\operatorname{am}(x_1+5\tau) = \operatorname{am} x_1 + 4\pi,$$

---

*) l. c. S. 489, art. [7].
**) l. c. S. 285.
***) *Gauss*, l. c. S. 490.

woraus sich

$$\tau = \frac{8K}{5}$$

ergiebt. Wir finden demnach bei dieser Annahme in Uebereinstimmung mit *Gauss*

$$\varphi_i = \mathrm{am}\left(x_1 + (i-1)\,\frac{4K}{5}\right).$$

Die von *Gauss* aufgestellten Formeln ergeben sich nun durch einfache Rechnung.

Ueber einen allgemeinen Satz aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen.

(Von Herrn *Ludwig Schlesinger* in Klausenburg.)

Im Folgenden erlaube ich mir einen Satz mitzutheilen (die Theoreme I.) und II.) der No. II.), von welchem ich in der Fortsetzung, der in diesem Journale*) abgedruckten Arbeit Gebrauch machen möchte. Die gesonderte Veröffentlichung mag dadurch gerechtfertigt erscheinen, dass einerseits der Satz selbst die Bedeutung, die der *Fuchs*schen Klasse linearer Differentialgleichungen im Rahmen der allgemeinen Theorie der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten zukommt, in einem neuen Lichte zeigt, und dass andererseits der Beweis, den ich für den gedachten Satz gebe, ein Beispiel für die Anwendbarkeit des *Riemann*schen Problems auf Fragen der allgemeinen Theorie linearer Differentialgleichungen darstellt. Daraus, dass sich mein Beweis auf die Lösbarkeit des *Riemann*schen Problems stützt, erwächst allerdings der Nachtheil, dass die beschränkenden Voraussetzungen, die der von mir gegebenen Lösung des *Riemann*schen Problems anhaften, scheinbar auch die allgemeine Gültigkeit des in Rede stehenden Satzes beeinträchtigen. Nur in dem Falle einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung, wo der Satz ohne weiteres einleuchtend wird, zeigt er sich von diesen beschränkenden Voraussetzungen frei.

In der Nr. I. habe ich einige allgemeine Hülfsbetrachtungen zusammengestellt. Ein kurzes Resumé dieser Note ist in den Comptes Rendus**) der Akademie der Wissenschaften zu Paris erschienen.

*) Bd. 123, S. 138—173.

**) Vom 7. Januar 1901, Bd. 132, S. 27.

I. *)

Es seien die linearen homogenen Differentialgleichungen n-ter Ordnung

$$\text{(A.)} \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_0 y = 0,$$

$$\text{(B.)} \qquad \frac{d^n z}{dx^n} + q_{n-1}\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \cdots + q_0 z = 0,$$

deren Coefffcienten $p_0, \ldots p_{n-1}$, $q_0, \ldots q_{n-1}$ wir als in der ganzen Ebene der complexen Variablen x eindeutige Functionen voraussetzen wollen, so beschaffen, dass zwischen ihren allgemeinen Lösungen y, z eine Beziehung von der Form

$$\text{(C.)} \qquad y = r_{00} z + r_{10} z' + \cdots + r_{n-1,0} z^{(n-1)}$$

besteht, wo die $r_{00}, r_{10}, \ldots r_{n-1,0}$ ebenfalls allenthalben eindeutige Functionen von x und die oberen Accente, wie auch stets im Folgenden, Ableitungen nach x bedeuten; dann wollen wir **) von den Differentialgleichungen (A.), (B.) sagen, sie seien ***cogredient.*** Bedeutet $z_1, \ldots, z_n$ ein Fundamentalsystem von (B.), so soll auch das durch die Gleichungen

$$\text{(C'.)} \qquad y_k = r_{00} z_k + r_{10} z_k' + \cdots + r_{n-1,0} z_k^{(n-1)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

definirte Fundamentalsystem $y_1, \ldots, y_n$ von (A.) mit dem Systeme der $z_1, \ldots, z_n$ cogredient heissen.

Vollzieht x einen geschlossenen Umlauf, der eine Werthänderung des allgemeinen Integrales z von (B.) nach sich zieht, so erfahren offenbar die cogredienten Fundamentalsysteme $z_1, \ldots, z_n$ und $y_1, \ldots, y_n$ dieselbe homogene lineare Substitution. Wenn umgekehrt zwei Fundamentalsysteme der Differentialgleichungen (A.), (B.) existiren, die bei jedem beliebigen, geschlossenen Umlaufe von x dieselbe lineare homogene Substitution erfahren, die also, wie wir kurz sagen wollen, dieselbe ***Monodromiegruppe*** haben, so sind die Differentialgleichungen (A.), (B.) und jene beiden Fundamentalsysteme cogredient. In der That ergeben sich, wenn man für jene beiden postulirten Fundamentalsysteme die Gleichungen (C'.) ansetzt, die

$$r_{00}, \quad r_{10}, \ldots, r_{n-1,0}$$

als Determinantenquotienten, deren Zähler und Nenner sich bei jedem ge-

*) Vergl. für die ganze Nummer, ***Fuchs,*** Berliner Sitzungsberichte, 1888, S. 1273 ff.

**) Vergl. Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Bd. II., 1. (Leipzig, 1897) Nr. 163.

schlossenen Umlaufe von x mit demselben Factor (der Determinante, der durch den Umlauf hervorgerufenen linearen Substitution) multipliciren.

Denken wir uns die Gleichung (C.) $(n-1)$-mal nach x differentiirt und jedes Mal die auftretende n-te Ableitung von z vermöge der Differentialgleichung (B.) durch die $n-1$ ersten Ableitungen ausgedrückt, so ergeben sich die Gleichungen

$$(C_\nu.) \qquad y^{(\nu)} = r_{0\nu} z + r_{1\nu} z' + \cdots + r_{n-1,\nu} z^{(n-1)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$$

wo

$$(1.) \qquad \begin{cases} r_{0\nu} = r'_{0,\nu-1} - r_{n-1,\nu-1} \cdot q_0, \\ r_{\lambda\nu} = r'_{\lambda,\nu-1} + r_{\lambda-1,\nu-1} - r_{n-1,\nu-1} \cdot q_\lambda \end{cases} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n-1)$$

gesetzt wurde. Die

$$r_{\lambda\nu} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, n-1; \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-1)$$

sind demnach allenthalben eindeutige Functionen von x.

Eine n-te Differentiation ergiebt endlich

$$(C_n.) \qquad \begin{cases} y^{(n)} = (r'_{0,n-1} - r_{n-1,n-1} \cdot q_0)\, z + (r'_{1,n-1} + r_{0,n-1} - r_{n-1,n-1} \cdot q_1) z' \\ \qquad\qquad + \cdots + (r'_{n-1,n-1} + r_{n-2,n-1} - r_{n-1,n-1} \cdot q_{n-1})\, z^{(n-1)}. \end{cases}$$

Multiplicirt man die Gleichungen (C.), $(C_1.)$, …, $(C_n.)$ der Reihe nach mit

$$p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}, 1$$

und addirt, so kommt rechter Hand ein homogener linearer Differentialausdruck $(n-1)$-ter Ordnung in z, mit in x eindeutigen Coefficienten, der mit Rücksicht auf die Differentialgleichung (A.) verschwinden muss, wenn man für z ***irgend*** eine Lösung von (B.) substituirt. Daraus folgt aber, dass in diesem Differentialausdrucke $(n-1)$-ter Ordnung die Coefficienten von

$$z, z', \ldots, z^{(n-1)}$$

einzeln verschwinden müssen. Es ist also

$$(2.) \qquad \begin{cases} \sum_{i=0}^{n-1} p_i r_{0i} + r'_{0,n-1} - r_{n-1,n-1} \cdot q_0 = 0, \\ \sum_{i=0}^{n-1} p_i r_{\lambda i} + r'_{\lambda,n-1} + r_{\lambda-1,n-1} - r_{n-1,n-1} \cdot q_\lambda = 0, \end{cases} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Aus den Gleichungen (1.) für $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$ und den Gleichungen (2.) ergiebt sich für die n^2 eindeutigen Functionen

$$r_{\lambda\nu} \qquad (\lambda, \nu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

das folgende System homogener linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit in x eindeutigen Coefficienten

$$(D_1.)\qquad \begin{cases} \dfrac{dr_{0\nu}}{dx} = r_{n-1,\nu}\cdot q_0 + r_{0,\nu+1} & (\nu = 0,1,\ldots,n-2), \\ \dfrac{dr_{\lambda\nu}}{dx} = -r_{\lambda-1,\nu} + r_{n-1,\nu}\cdot q_\lambda + r_{\lambda,\nu+1} & \binom{\lambda = 1,2,\ldots,n-1}{\nu = 0,1,\ldots,n-2}, \end{cases}$$

$$(D_2.)\qquad \begin{cases} \dfrac{dr_{0,n-1}}{dx} = r_{n-1,n-1}\cdot q_0 - \sum_{i=0}^{n-1} p_i r_{0i}, \\ \dfrac{dr_{\lambda,n-1}}{dx} = -r_{\lambda-1,n-1} + r_{n-1,n-1}\cdot q_\lambda - \sum_{i=0}^{n-1} p_i r_{\lambda i} & (\lambda = 1,2,\ldots,n-1). \end{cases}$$

Betrachtet man dieses System von Differentialgleichungen ***rein formal,*** d. h. ohne über die analytische Natur der Coefficienten der Differentialgleichungen (A.), (B.) irgend welche speciellen Voraussetzungen zu machen, so gilt das Folgende. Bedeutet

$$\varrho_{\lambda\nu} \qquad (\lambda,\nu = 0,1,\ldots,n-1)$$

ein ***beliebiges*** Lösungssystem des Gleichungssystems $(D_1.)$, $(D_2.)$, z ein beliebiges Integral von (B.), und bildet man den Ausdruck

$$(3.)\qquad \eta = \varrho_{00}z + \varrho_{10}z' + \cdots + \varrho_{n-1,0}z^{(n-1)},$$

so folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen $(D_1.)$ und (B.):

$$\eta^{(\nu)} = \varrho_{0\nu}z + \varrho_{1\nu}z' + \cdots + \varrho_{n-1,\nu}z^{(n-1)} \qquad (\nu = 1,2,\ldots,n-1),$$

und wenn wir auch noch $\eta^{(n)}$ bilden, so ergiebt sich aus den Gleichungen $(D_2.)$, dass η eine Lösung der Differentialgleichung (A.) darstellt. Setzt man in (3.) für z die Elemente $z_1,\ldots,z_n$ eines Fundamentalsystems von (B.) ein, so constituiren die

$$(4.)\qquad \eta_k = \varrho_{00}z_k + \varrho_{10}z_k' + \cdots + \varrho_{n-1,0}z_k^{(n-1)} \qquad (k = 1,2,\ldots,n)$$

ein Fundamentalsystem von (A.).

Nehmen wir nun wieder die Coefficienten der Differentialgleichungen (A.), (B.) als eindeutige Functionen von x an, so ist die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Cogredienz der beiden Differentialgleichungen die, dass das System linearer homogener Differentialgleichungen mit eindeutigen Coefficienten $(D_1.)$, $(D_2.)$ ***ein*** particuläres Lösungssystem $r_{\lambda\nu}$ besitzt, dessen sämmtliche n^2 Elemente eindeutige Functionen der unabhängigen Variabeln sind. Setzt man in (4.) an die Stelle der einem beliebigen Lösungssysteme $\varrho_{\lambda\nu}$ des Gleichungssystems $(D_1.)$, $(D_2.)$ angehörigen $\varrho_{\lambda 0}$ die entsprechenden Elemente $r_{\lambda 0}$ jenes particulären, eindeutigen Lösungssystems

$r_{\lambda\nu}$, so stellen die Ausdrücke (4.) das mit $z_1, \ldots, z_n$ cogrediente Fundamentalsystem von (A.) dar. Im allgemeinen kann es aber auch kein von $r_{\lambda\nu}$ wesentlich verschiedenes Lösungssystem des Gleichungssystems $(D_1.)$, $(D_2.)$ geben, dessen sämmtliche Elemente eindeutige Functionen von x sind. In der That folgt zunächst aus der Form der Gleichungen $(D_1.)$, $(D_2.)$, dass, wenn für ein Lösungssystem $\varrho_{\lambda\nu}$ die n Elemente $\varrho_{\lambda 0}$ eindeutige Functionen sind, das Gleiche auch für die n^2-n übrigen $\varrho_{\lambda\nu}$ gelten muss. Nehmen wir nun an, es seien in (3.) die $\varrho_{\lambda 0}$ eindeutige Functionen von x, die sich von den ebenfalls eindeutigen $r_{\lambda 0}$ nicht nur durch einen constanten Factor unterscheiden; dann denken wir uns aus den n Gleichungen

$$(5.) \qquad y^{(\nu)} = r_{0\nu} z + r_{1\nu} z' + \cdots + r_{n-1,\nu} z^{(n-1)} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

die $z, z', \ldots, z^{(n-1)}$ ausgerechnet. Diese Rechnung muss stets ausführbar sein, wenn y nicht einer linearen Differentialgleichung von niedrigerer als der $n$ten Ordnung mit eindeutigen Coefficienten genügt, und ergiebt

$$(6.) \qquad z^{(\nu)} = s_{0\nu} y + s_{1\nu} y' + \cdots + s_{n-1,\nu} y^{(n-1)} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots n-1),$$

wo die n^2 Grössen $s_{\lambda\nu}$, die das zu dem Systeme der n^2 Grössen $r_{\lambda\nu}$ reciproke System bilden, eindeutige Functionen von x sind, die ein Gleichungssystem befriedigen, welches aus $(D_1.)$, $(D_2.)$ hervorgeht, indem man die Coefficientensysteme $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ und $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$ mit einander vertauscht. Setzen wir die Werthe (6.) in (3.) ein, so erhalten wir

$$\eta = A_0 y + A_1 y' + \cdots + A_{n-1} y^{(n-1)},$$

wo die $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ eindeutige Functionen von x bedeuten. Aus einer solchen Beziehung zwischen zwei, nicht nur durch einen constanten Factor unterschiedenen Lösungen der Differentialgleichung (A.) folgt aber nach einem Satze des Herrn *Frobenius**), dass die Differentialgleichung (A.) in dem Sinne reductibel ist, dass sie mit einer linearen Differentialgleichung von niedrigerer Ordnung mit eindeutigen Coefficienten Integrale gemein hat. Aus einem Satze des Herrn *Fuchs***) folgt überdies, dass cogrediente Differentialgleichungen stets gleichzeitig irreductibel sind.

Wir können also das Ergebniss der bisherigen Untersuchung wie folgt zusammenfassen:

Bedeuten (A.), (B.) zwei lineare homogene Differentialgleichungen

---

*) Dieses Journal, Bd. 76, S. 268.

**) Berliner Sitzungsberichte 1888, S. 1276.

mit in x eindeutigen Coefficienten, so ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass diese Differentialgleichungen cogredient seien, die, dass das System linearer homogener Differentialgleichungen mit eindeutigen Coefficienten $(D_1.)$, $(D_2.)$ ein particuläres Integralsystem $r_{\lambda\nu}$ besitzt, dessen sämmtliche Elemente eindeutige Functionen von x sind. Wenn die Differentialgleichung (A.), und folglich auch (B.), in dem Sinne irreductibel ist, dass sie mit keiner linearen homogenen Differentialgleichung von niedrigerer Ordnung mit eindeutigen Coefficienten Lösungen gemein hat, so besitzt das Gleichungssystem $(D_1.)$, $(D_2.)$ nur ***ein einziges*** eindeutiges, particuläres Integralsystem.

Das Gleichungssystem $(D_1.)$, $(D_2.)$ ist so beschaffen, dass jedes Lösungssystem $\varrho_{\lambda\nu}$ desselben durch die n Elemente $\varrho_{\lambda 0}$ eindeutig bestimmt ist, dass die aus den Elementen eines solchen Lösungssystems gebildete Determinante

$$|\varrho_{\lambda\nu}| \qquad (\lambda, \nu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

nicht identisch verschwindet, und dass die Elemente des dem Systeme der n^2 Grössen $\varrho_{\lambda\nu}$ reciproken Systems, ein ebenso gestaltetes Gleichungssystem befriedigen, welches aus $(D_1.)$, $(D_2.)$ hervorgeht, indem man die $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ und $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$ mit einander vertauscht.

II.

Es sei die Differentialgleichung (A.) mit eindeutigen Coefficienten so beschaffen, dass ihre Integrale nur eine endliche Anzahl von Verzweigungspunkten

$$a_1, a_2, \ldots, a_\sigma, \infty$$

besitzen, und dass die absoluten Beträge der Wurzeln der Fundamentalgleichungen, die zu den Substitutionen gehören, welche ein Fundamentalsystem bei einfachen positiven Umläufen um die einzelnen Verzweigungspunkte erfährt, gleich Eins sind. Die letztere Voraussetzung wird nur zu dem Zwecke gemacht, um die Ergebnisse der in diesem Journale*) veröffentlichten Arbeit anwenden zu können.

Wir denken uns die im Endlichen gelegenen Verzweigungspunkte $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ mit dem unendlich fernen Punkte durch die Querschnitte $l_1, l_2, \ldots, l_\sigma$

*) Bd. 123, S. 138ff.

verbunden und bezeichnen mit

$$A_1, A_2, \ldots, A_\sigma$$

die Substitutionen, die ein Fundamentalsystem $y_1, \ldots, y_n$ von (A.) erfährt, wenn die unabhängige Variable x die Querschnitte $l_1, l_2, \ldots, l_\sigma$ einmal im positiven Sinne überschreitet. Da zufolge der über die Differentialgleichung (A.) gemachten Voraussetzung, die Substitutionen $A_1, A_2, \ldots, A_\sigma$ die in der gedachten Arbeit*) sogenannten ***Convergenzbedingungen*** befriedigen, können wir nach den Ergebnissen dieser Arbeit die Existenz eines Functionssystems $z_1, \ldots, z_n$ als gesichert ansehen, welches das durch die singulären Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma, \infty$ und die zugehörigen Fundamentalsubstitutionen $A_1, A_2, \ldots, A_\sigma$ bestimmte ***Riemann***sche Problem**) löst, d. h. in der ganzen durch die Schnitte $l_1, l_2, \ldots, l_\sigma$ zerschnittenen x-Ebene eindeutig, endlich und stetig ist, beim Ueberschreiten dieser Querschnitte die Substitutionen $A_1, A_2, \ldots, A_\sigma$ erfährt und in den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma, \infty$ nicht unbestimmt wird. Dieses Functionssystem genügt einer homogenen linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit rationalen Coefficienten, die der *Fuchs*schen Klasse angehört, nebst den wesentlichen singulären Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma, \infty$ nur noch ausserwesentliche singuläre Stellen besitzt und offenbar mit der Differentialgleichung (A.) cogredient ist. Wenn wir diese Differentialgleichung der *Fuchs*schen Klasse mit der Differentialgleichung (B.) identificiren, so erscheinen die cogredienten Fundamentalsysteme $y_1, \ldots, y_n$ und $z_1, \ldots, z_n$ durch die Relationen (C'.), die allgemeinen Integrale y und z durch die Relation (C.) mit einander verknüpft, während die eindeutigen Functionen $r_{\lambda 0}$ und die durch diese bestimmten (Gl. (1.) der Nr. I.) $r_{\lambda\nu}$ dem Differentialgleichungssysteme $(D_1.)$, $(D_2.)$ Genüge leisten, in welchem jetzt die

$$q_0, q_1, \cdots, q_{n-1}$$

rationale Functionen von x bedeuten. Wir haben also das Theorem:

I. Für eine lineare Differentialgleichung (A.) mit eindeutigen Coefficienten und von der am Eingang dieser Nummer angegebenen Beschaffenheit, lassen sich rationale Functionen

$$q_0, q_1, \cdots, q_{n-1}$$

von der für die Coefficienten einer Differentialgleichung der *Fuchs*schen Klasse charakteristischen Form stets so bestimmen, dass das

*) a. a. O. S. 147.

**) Problem (C.) a. a. O. S. 160.

Differentialgleichungssystem (D_1.), (D_2.) ein particuläres Integralsystem $r_{\lambda\nu}$ besitzt, dessen sämmtliche Elemente eindeutige Functionen sind, und das allgemeine Integral y von (A.) ist dann in der Form

$$(C.) \qquad y = r_{00}z + r_{10}z' + \cdots + r_{n-1,0}z^{(n-1)}$$

darstellbar, durch das allgemeine Integral z einer der *Fuchs*schen Klasse angehörenden linearen Differentialgleichung (B.) mit den Coefficienten $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$.

Es seien nun insbesondere die Coefficienten $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ der Differentialgleichung (A.) selbst *rationale* Functionen von x.

Dann sind die $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma, \infty$ diejenigen Unendlichkeitsstellen der $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$, in deren Umgebung die Integrale von (A.) nicht eindeutig sind, die übrigen Unendlichkeitsstellen der Coefficienten, in deren Umgebung die Integrale dann jedenfalls nach ganzen Potenzen des Incrementes entwickelbar sind, bleiben ausser Betracht. Die Coefficienten des Differentialgleichungssystems (D_1.), (D_2.) sind dann rationale Functionen von x, und wir haben als besonderen Fall des Satzes I. das Theorem:

II. Bedeutet (A.) eine lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten, die nicht zur *Fuchs*schen Klasse gehört und für welche die zu den einzelnen Verzweigungspunkten der Integrale gehörigen Fundamentalgleichungen lauter Wurzeln vom absoluten Betrage Eins besitzen, so giebt es eine mit (A.) cogrediente Differentialgleichung (B.) der *Fuchs*schen Klasse, durch deren allgemeines Integral z das allgemeine Integral y von (A.) in der Form (C.) darstellbar ist, und die Coefficienten $r_{\lambda 0}$ in (C.) sind eindeutige Functionen von x, die mit den durch sie eindeutig bestimmten übrigen Grössen $r_{\lambda\nu}$ das homogene lineare Differentialgleichungssystem mit rationalen Coefficienten (D_1.), (D_2.) befriedigen.

Mit anderen Worten: Es lassen sich, wenn

$$p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$$

die rationalen Coefficienten der gegebenen Differentialgleichung (A.) bedeuten, die

$$q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$$

als rationale Functionen von x von der für die Coefficienten

einer Differentialgleichung der *Fuchs*schen Klasse charakteristischen Form stets (und zwar auf unendlich viele Weisen, da an die Stelle von (B.) jede mit (B.) zu derselben Klasse gehörige Differentialgleichung treten kann) so bestimmen, dass das Differentialgleichungssystem $(D_1.), (D_2.)$ ein, und wenn (A.) in dem Sinne irreductibel ist, dass es mit keiner linearen Differentialgleichung von niedrigerer Ordnung mit eindeutigen Coefficienten Integrale gemein hat, auch nur ein particuläres Integralsystem besitzt, dessen sämmtliche Elemente eindeutige Functionen von x sind. —

Da es sich für eine gegebene Differentialgleichung (A.) im wesentlichen darum handeln wird, die mit ihr cogrediente Differentialgleichung der *Fuchs*schen Klasse (B.) aufzustellen, könnte es zweckmässig erscheinen, an die Stelle des Differentialgleichungssystems $(D_1.), (D_2.)$ das aus demselben durch Vertauschung der $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$ mit den $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ hervorgehende:

$$(E_1.)\quad \begin{cases} \dfrac{ds_{0\nu}}{dx} = s_{n-1,\nu}\cdot p_0 + s_{0,\nu+1} & (\nu = 0, 1, \ldots, n-2), \\ \dfrac{ds_{\lambda\nu}}{dx} = -s_{\lambda-1,\nu} + s_{n-1,\nu}\cdot p_\lambda + s_{\lambda,\nu+1} & \begin{pmatrix}\lambda = 1, 2, \ldots, n-1\\ \nu = 0, 1, \ldots, n-2\end{pmatrix}, \end{cases}$$

$$(E_2.)\quad \begin{cases} \dfrac{ds_{0,n-1}}{dx} = s_{n-1,n-1}\cdot p_0 - \sum_{i=0}^{n-1} q_i s_{0i}, \\ \dfrac{ds_{\lambda,n-1}}{dx} = -s_{\lambda-1,n-1} + s_{n-1,n-1}\cdot p_\lambda - \sum_{i=0}^{n-1} q_i s_{\lambda i} & (\lambda = 1, 2, \ldots, n-1), \end{cases}$$

zu setzen. Hierin lassen sich für gegebene rationale $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ die $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$ als rationale Functionen von der für die Coefficienten einer Differentialgleichung der *Fuchs*schen Klasse charakteristischen Form stets so bestimmen, dass dieses Differentialgleichungssystem ein particuläres eindeutiges Integralsystem $s_{\lambda\nu}$ besitzt, und wenn diese Bestimmung gelungen ist, stellt

$$z = s_{10}y + s_{10}y' + \cdots + s_{n-1,0}y^{(n-1)}$$

die allgemeine Lösung der mit (A.) cogredienten Differentialgleichung der *Fuchs*schen Klasse (B.) dar.

In der Theorie der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten, die nicht zur *Fuchs*schen Klasse gehören, hat man, wenn es sich um die Untersuchung der Integrale in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle handelt, zwei wesentlich von einander verschiedene Aufgaben zu lösen. Einmal sind die Wurzeln der Fundamentalgleichung zu bestimmen, die zu einem solchen singulären Punkte gehört, das andere Mal

ist das Verhalten der Integrale zu untersuchen, wenn sich die unabhängige Variable auf einem bestimmten Wege jener Unbestimmtheitsstelle annähert. Die erste Aufgabe ist durch den Satz II., wenigstens für den Fall, wo alle Fundamentalgleichungen nur Wurzeln vom absoluten Betrage Eins besitzen, theoretisch auf die analoge Frage für Differentialgleichungen der *Fuchs*schen Klasse zurückgeführt, während die zweite Aufgabe, auf deren Lösung namentlich die *Poincaré*schen Methoden der asymptotischen Darstellung durch divergente Potenzreihen hinzielen, von der Differentialgleichung n-ter Ordnung auf das eindeutige Lösungssystem $s_{\lambda\nu}$ des Systems homogener linearer Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten $(E_1.)$, $(E_2.)$ übertragen wird.

Dass die Untersuchung einer linearen Differentialgleichung (A.) mit rationalen Coefficienten, die nicht zur *Fuchs*schen Klasse gehört, auf die einer Differentialgleichung der gedachten Klasse und gewisser eindeutiger Functionen reducirt werden kann, lässt sich auch mit Hülfe der *Picard-Vessiot*schen Theorie der *Transformationsgruppe* in folgender Weise darlegen.

Es sei G die Transformationsgruppe der Differentialgleichung (A.), unter Zugrundelegung des Fundamentalsystems $y_1, \ldots, y_n$, H die Transformationsgruppe der mit (A.) cogredienten Differentialgleichung (B.) der *Fuchs*schen Klasse, unter Zugrundelegung des mit $y_1, \ldots, y_n$ cogredienten Fundamentalsystems $z_1, \ldots, z_n$, θ die aus den $A_1, \ldots, A_\sigma$ als Fundamentalsubstitutionen componirte, den beiden Differentialgleichungen (A.), (B.) gemeinsame Monodromiegruppe. Die abzählbare Gruppe θ ist natürlich in jeder der beiden algebraischen*) Gruppen G, H als Untergruppe enthalten. Nach dem Fundamentalsatze der Herren *Picard* und *Vessiot* hat die Transformationsgruppe einer linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten die Eigenschaft, dass jede rationale Differentialfunction der Elemente eines Fundamentalsystems, die bei den Transformationen dieser Gruppe ungeändert bleibt, rational in x ist, und dass auch umgekehrt, jede rationale Differentialfunction, die gleich einer rationalen Function von x ist, bei den Transformationen der Transformationsgruppe ungeändert bleibt.

Da die Differentialgleichung (B.) der *Fuchs*schen Klasse angehört,

*) Unter einer „algebraischen Gruppe“ wird eine solche Untergruppe der allgemeinen linearen homogenen Gruppe verstanden, die durch ein System algebraischer Gleichungen zwischen den n^2 Coefficienten der allgemeinsten linearen homogenen Substitution charakterisirt werden kann; vergl. z. B. Handbuch etc. Bd. II, 1, S. 21, 22.

ihre Integrale also keine Unbestimmtheitsstellen darbieten, ist jede rationale Differentialfunction der $z_1, \ldots, z_n$, die bei den Substitutionen der Monodromiegruppe θ ungeändert bleibt, d. h. eindeutig in x ist, auch eine rationale Function von x und bleibt folglich auch bei den Transformationen der Transformationsgruppe H ungeändert. Es kann demnach keine algebraische Untergruppe von H geben, die die Substitutionen der abzählbaren Gruppe θ in sich fasst, oder mit anderen Worten, H ist die engste algebraische Gruppe, die die Monodromiegruppe θ als Untergruppe enthält. *Diese Eigenschaft ist für die Differentialgleichungen der Fuchsschen Klasse charakteristisch**).

Dagegen muss G, wenn (A.) nicht zur *Fuchs*schen Klasse gehört, die Gruppe H als Untergruppe enthalten, ohne mit H identisch zu sein.

Sei nun $R(t_1, \ldots, t_n)$ eine rationale Differentialfunction der als unbestimmte analytische Functionen von x aufzufassenden $t_1, \ldots, t_n$, die bei den Transformationen von H und nur bei diesen ungeändert bleibt. Setzt man in R die z_k an die Stelle der t_k, so verwandelt sich dieser Ausdruck in eine rationale Function von x,

$$R(z_1, \ldots, z_n) = \psi(x),$$

setzt man dagegen die y_k an die Stelle der t_k, so wird

$$R(y_1, \ldots, y_n) = \varphi(x)$$

zwar keine rationale, aber eine eindeutige Function von x sein. Nach einem Satze des Herrn *Vessiot***) befriedigt diese eindeutige Function $\varphi(x)$ eine algebraische Differentialgleichung mit in x rationalen Coefficienten, die in der Bezeichnungsweise des Herrn *Vessiot****), Fundamentalsysteme von Integralen besitzt. — Denken wir uns die Function

$$R(y_1, \ldots, y_n) = \varphi(x)$$

dem Rationalitätsbereiche der Differentialgleichung (A.) adjungirt, so reducirt sich, wie Herr *Vessiot*†) gezeigt hat, die Transformationsgruppe G von (A.) auf diejenige Untergruppe, bei deren Transformationen R ungeändert bleibt, d. h. also auf H. Nach dieser Adjunction ist also jede rationale Differential-

---

*) Hiernach wäre eine Bemerkung des Herrn *Gino Fano*, Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei, T. IV, 1, S. 294 oben, zu berichtigen. Vergl. Handbuch etc. Bd. II, 1, S. 101.

**) Thèses (Paris, 1892), Deuxième partie, Chap. II, 2.

***) Ebenda, Chap. III, 6.

†) Ebenda, Chap. V, 1.

function der $y_1, \ldots, y_n$, die bei den Substitutionen der Monodromiegruppe θ ungeändert bleibt, auch ***rational bekannt***, d. h. die Differentialgleichung (A.) verhält sich wie eine Differentialgleichung der *Fuchs*schen Klasse.

Wir haben demnach das Theorem:

III. Adjungirt man dem Rationalitätsbereiche einer beliebigen linearen Differentialgleichung (A.) mit rationalen Coefficienten, deren zu den einzelnen Verzweigungspunkten gehörige Fundamentalgleichungen nur Wurzeln vom absoluten Betrage Eins besitzen, eine gewisse eindeutige Function, die einer algebraischen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten und mit Fundamentalsystemen von Integralen genüge leistet, so reducirt sich die Transformationsgruppe dieser Differentialgleichung auf die engste algebraische Gruppe, in welcher die Monodromiegruppe von (A.) enthalten ist; jede rationale Differentialfunction der Elemente eines Fundamentalsystems, die eindeutig ist, wird rational bekannt, die Differentialgleichung (A.) erhält also durch diese Adjunction den Charakter einer Differentialgleichung der *Fuchs*schen Klasse.

Drei Briefe *Aronholds* an *Hesse.*

(Von Herrn *S. Gundelfinger* in Darmstadt.)

Die drei folgenden Briefe sind Tagebüchern *Hesses* aus den Jahren 1848—49 (Manuskripte der Königl. Techn. Hochschule zu München, III:7) und 1850—51 (Manuskripte III:8) entnommen, die mir als Mitherausgeber der Werke *Hesses* von Herrn Professor *Dyck* in München im Frühjahr 1896 auf einige Wochen zur Verfügung gestellt waren. Dieselben werden hier nach eingeholter Erlaubniss des Herrn Gerichtsassessors Dr. *Aronhold* in Berlin der Oeffentlichkeit übergeben, da sie zusammen mit den beiden wichtigen, durch Herrn Professor *Lampe* veröffentlichten Schreiben *Aronholds* an *Richelot**) einen Gesammteinblick in die Entstehungsweise der Sätze *Aronholds* über die Invariantentheorie gewähren. Die drei Schreiben an *Hesse* zeigen, dass *Aronhold* als Ausgangspunkt die Geometrie unter Einfluss von *Hesse, Moebius, Plücker* genommen hat, aber sehr bald, angeregt durch *Eisenstein* und *Cayley*, im Laufe von sieben Monaten (man vergleiche l. c. Brief an *Richelot* vom 29. Sept. 1850) zu den fundamentalen Differentialgleichungen der Invariantentheorie gelangte.

I.

Ew. Hochwohlgeboren,

erlaube ich mir die beiliegende Abhandlung [1.]**) mit der ergebensten Bitte zu übersenden, dieselbe einer geneigten Ansicht zu würdigen. Gleichzeitig

*) Archiv der Math. u. Phys. Herausgeg. von *E. Lampe, W. Franz Mayer, E. Jahnke.* I. S. S. 38—43.

**) Die Ziffern beziehen sich auf die von mir gegebenen Erläuterungen am Ende jedes Briefes. Gf.

bin ich so frei Ihnen einen Wunsch vorzutragen, dessen Erfüllung mir ebensoviel Freude verursachen, als es mir zur hohen Ehre gereichen würde, wenn Sie mich derselben würdig erachten wollten, und welcher darin besteht, dass Ew. Hochwohlgeboren die freundliche Beziehung, in welcher ich zu Ihnen in Königsberg gestanden, durch eine wissenschaftliche Correspondenz rege zu erhalten sich geneigt finden möchten. Wenn mich die Beweise Ihrer Güte und des Wohlwollens, daran ich mich in Königsberg zu erfreuen hatte, auch schon früher zu dieser Bitte hätten ermuthigen können, so glaubte ich dieselbe doch nicht früher wagen zu dürfen, als bis ich Ihnen ein Zeugniss meiner Thätigkeit vorlegen konnte. — Ew. Hochwohlgeboren werden aus dem Anliegenden sich überzeugen, dass nicht allein Ihr mündlicher Vortrag, sondern auch Ihre der Oeffentlichkeit übergebenen Arbeiten mir zur Belehrung dienten. Von der Vorzüglichkeit derselben durchdrungen, versuchte ich meine geringen wissenschaftlichen Kräfte, um auf auf dem von Ihnen vorgezeichneten Wege weiter zu gehen, und so vielleicht in diesem interessanten Gebiete der Mathematik einen Fortschritt bewirken zu können.

Wenn mir auch dieses wenig gelungen sein mag, und ich fühle, wie sehr ich um Ihre Milde bei der gütigen Beurtheilung des Dargebotenen bitten muss, so werden Sie doch aus demselben ersehen, dass ich mich vielfach mit dem Gegenstand beschäftigt und auf das Studium Ihrer Theorien allen Fleiss verwendet habe, der mich für das Verständniss derselben fähig machen könnte.

Leider sind meine äusseren Verhältnisse noch nicht von der Art, dass ich zu einer festen Stellung im Leben gelangen konnte und wenn die tägliche Mühe den Lebensunterhalt zu erwerben auf meine wissenschaftlichen Bestrebungen einen niederdrückenden Einfluss ausübt, so macht sie es vollends unmöglich diejenigen Verpflichtungen zu erfüllen, an welche ich mich beim Eintritt in eine bessere Lage für gebunden erachte.

Ew. Hochwohlgeboren würden mich unendlich erfreuen, wenn Sie durch Beantwortung des Gegenwärtigen mich einer gütigen Berücksichtigung nicht ganz unwürdig erachten wollten.

Genehmigen Ew. Hochwohlgeboren den Ausdruck der vollkommensten Hochachtung

Ihres ergebensten

Berlin, den 1. October 1849. *S. Aronhold.*

Wenn ich Ew. Hochwohlgeboren Geduld noch auf kurze Zeit in Anspruch nehmen darf, so würde ich es durch die folgende Mittheilung thun, welche in der Abhandlung nicht enthalten ist.

Ich beziehe mich hiebei auf Ihre Abhandlung des 28. Bandes [2.] und benutze die Verbindungen aus den Coefficienten der homogenen Function dritten Grades von drei Variabeln, welche ich in meiner Abhandlung durch S, T, R bezeichnet habe, wovon die letztere mit der von Ihnen so bezeichneten Function bis auf einen Zahlenfactor übereinstimmt. Wenn man die gegebene Function in die folgende transformiren will:

$$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + 6\pi\, y_1\, y_2\, y_3$$

so kann man zur Bestimmung von π die Gleichungen 56) Ihrer Abhandlung [3.] benutzen, welche durcheinander dividirt, die folgende geben:

$$\frac{d}{\delta} = 6^3 r^2 \pi$$

so dass π durch die Wurzel $\frac{d}{\delta}$ der biquadratischen Gleichung und durch die Determinante r der Substitutionscoefficienten bestimmt ist, deren Werthe Sie angegeben haben.

Wenn man aber π durch die *ursprünglichen Coefficienten* direct ausdrückt, so gelangt man zu einem viel einfacheren Resultate, als es dem Anschein nach möglich ist. Sie haben auseinandergesetzt, dass es eigentlich 12 Transformationen giebt, von denen aber nur 4 wesentlich sind, da immer drei nur durch die dritten Wurzeln der Einheit sich von einander unterscheiden. Der Werth für π hängt demnach von einer Gleichung des 12. Grades ab, die in 3 biquadratische zerlegbar ist, welche sich nur durch die dritten Wurzeln $1, k, k^2$ der Einheit unterscheiden und zwar sind diese Gleichungen die folgenden: [4.]

$$4\sqrt[3]{R}\cdot\pi^4 - 8S\pi^3 - 4\sqrt[3]{R}\cdot\pi - S = 0$$

$$4k\sqrt[3]{R}\cdot\pi^4 - 8S\pi^3 - 4k^2\sqrt[3]{R}\cdot\pi - S = 0$$

$$4k^2\sqrt[3]{R}\cdot\pi^4 - 8S\pi^3 - 4k\sqrt[3]{R}\cdot\pi - S = 0$$

Man kann den Werth für r^2 auf ähnliche Weise durch eine in 4 biquadratische Gleichungen zerfällbare Gleichung des 12. Grades darstellen, nämlich: [5.]

$$27(r^2)^4 - 18\sqrt[3]{R}(r^2)^2 + 8T(r^2) - \sqrt[3]{R^2} = 0$$

$$27(r^2)^4 - 18k\sqrt[3]{R}(r^2)^2 + 8T(r^2) - k^2\sqrt[3]{R^2} = 0$$

$$27(r^2)^4 - 18k^2\sqrt[3]{R}(r^2)^2 + 8T(r^2) - k\sqrt[3]{R^2} = 0$$

Alle Gleichungen sowohl für π als für r^2 sind *speciellen* Charakters, und ähnlich der biquadratischen, die ich in der Abhandlung discutirt habe. — Für die Geometrie findet in Bezug auf die Functionen S und T der folgende Satz Statt:

Wenn die Gleichungen

$$S = 0 \qquad T = 0$$

zwischen den Coefficienten der Gleichung einer Curve dritten Grades erfüllt sind, so hat die Curve einen *Rückkehrpunkt* und umgekehrt. — Da ferner jeder Rückkehrpunkt gleichzeitig ein Doppelpunkt ist, und

$$R = 0$$

die Bedingungsgleichung ist, dass die Curve einen Doppelpunkt hat, so folgt schon hieraus, dass für $S = 0$ und $T = 0$ auch R verschwinden muss, was aus der in meiner Abhandlung angegebenen Form für R hervorgeht.

Anmerkungen.

[1.] Cf. dieses Journal Bd. 39 S. 140—160.

[2.] Ibid. Bd. 28 S. 68—107.

[3.] Ibid. Bd. 28 S. 91.

[4.] Setzt man

$$G = 1 + 8\pi^3, \qquad H = 4\pi(\pi^3 - 1),$$

so wird

$$\frac{R}{S^3} = \frac{T^2 - S^3}{S^3} = \frac{G^3}{H^3}; \quad \frac{R^{1/3}}{S} = \frac{G}{H}$$

oder

$$R^{1/3} 4\pi(\pi^3 - 1) - S(1 + 8\pi^3) = 0. \qquad \text{q. e. d.}$$

[5.] Die hier angewandte Bezeichnung von r stimmt überein mit der von *Hesse* in Bd. 28 dieses Journals S. 91 angegebenen. *Aronhold* hat in Bd. 55 S. 161 dieselbe Grösse durch r^{-1} bezeichnet, so dass man hat:

$$r^{-12} R = (1 + 8\pi^3)^3, \qquad r^{-6} T = 8\pi^6 + 20\pi^3 - 1.$$

Hieraus

$$\pi^3 = \frac{1}{8}(r^{-4}R^{1/3} - 1)$$

und

$$r^{-6}T = \frac{1}{8}(r^{-4}R^{1/3} - 1)^2 + \frac{5}{2}(r^{-4}R^{1/3} - 1) - 1,$$

oder geordnet:

$$27 - 18r^{-4}R^{1/3} + 8r^{-6}T - r^{-8}R^{2/3} = 0.$$

Gf.

II.

Hochgeehrter Herr Professor!

Obwohl Ihr geehrtes Schreiben fast seit 4 Wochen in meinem Besitze sich befindet, so wollte ich dasselbe doch nicht früher beantworten, als bis ich die Abhandlung erhalten hätte, über welche Sie Auskunft verlangen. Ich kann Ihnen jetzt Bericht darüber erstatten, erlaube mir jedoch zuvor die Französische Strasse No. 10 als meine Adresse zu bezeichnen, um nicht wieder den Willen mit der That zu verwechseln, was mir im vorigen Schreiben begegnet ist, und was ich Sie gütigst zu entschuldigen bitte. Ich hatte während des Schreibens daran gedacht und am Ende es doch vergessen. Aus einer Aeusserung *Jacobi*s glaube ich entnehmen zu können, dass Ihr geehrtes Schreiben sich schon längere Zeit hier befand, noch bevor ich es erhielt und ich bedauere um so mehr, dass die Beantwortung desselben durch den langen Weg, den man zuweilen machen muss, um ein Buch aus der Königl. Bibliothek zu erhalten, sich noch mehr verzögert hat.

Die günstige Beurtheilung, welche Sie meiner Arbeit gütigst zu Theil werden liessen, ist mir eine Ermuthigung meine Kräfte weiter anzustrengen, um zu dem Bau, an welchem so viele der tüchtigsten Männer arbeiten, vielleicht auch etwas beitragen zu können, wenn es auch nur ein Geringes sein sollte.

Ich danke Ihnen herzlichst dafür, sowie für Ihre freundlichen Wünsche in Betreff meiner Zukunft. Ihre gütige Bereitwilligkeit, wissenschaftliche Mittheilungen mit mir auszuwechseln, hat mich lebhaft erfreut und ich bitte um Ihre gütige Nachsicht, wenn die Erfolge meiner Studien Ihnen das Interesse nicht gewähren können, welches Ihre wissenschaftlichen Leistungen mir einzuflössen im Stande sind.

Ihren Gruss habe ich ***Steiner*** überbracht. Den kleinen Krieg mit ihm dürften Sie weniger ernst nehmen. Er ist zu sehr Hypochonder, als dass er von dem abgehen sollte, was er sich einmal in den Kopf gesetzt hat. Er scheint sich schon durch Ihre früheren Arbeiten verletzt zu fühlen, wie überhaupt durch die der Analytiker, und es ist besonders ***Plücker,*** den er gründlich hasst, und welcher wohl seine geringe Zärtlichkeit für die Analysis hevorgerufen hat. Uebrigens dürfte ***Steiner*** seine wichtigsten Entdeckungen immer publicirt haben und nur neue Methoden für die Behandlung bekannter Probleme in seinen Manuskripten zurückbehalten. Von dem Probleme der Wendepunkte für Curven vierten Grades hat er oft gesagt, dass er daraus „nichts Gescheidtes“ machen kann. Es scheint überhaupt die Synthesis der Gränze nahe zu sein, wo sie ohne die Hülfe der Analysis nicht weiter kommen kann. Vielleicht irre ich mich, wenn ich aus dem Umstande, dass ***Steiner*** recht gerne analytische Resultate benutzt, einige Gründe für die Behauptung entnehmen kann.

Die Anwendung der in Ihrem werthen Schreiben erwähnten Form der Functionen vierten Grades auf das Problem der Doppeltangenten übersehe ich noch nicht, es wird mir indessen wohl gelingen, wenn ich die Form mehr durchdacht habe. [1.] In den Versuchen, die ich machte, um die Probleme der Functionen dritten Grades zu verallgemeinern, strebte ich immer dahin, aus gegebenen Formen der Componenten charakteristische Verbindungen zusammenzusetzen, wie letztere auch ausfallen mochten, während Sie, wenn ich Sie richtig verstanden habe, mehr Werth auf die Determinantenform legen, und es dahin gestellt sein lassen, welche Componenten dabei zur Anwendung kommen. Aus diesem Grunde war es mir eine ebenso neue, wie interessante Bemerkung, dass die gewöhnliche Determinantenform für das Problem der Doppeltangenten wichtig ist. Man kann die Functionen vierten Grades von drei Variablen auf andere Formen bringen, welche viele Eigenschaften mit den Determinanten gemeinschaftlich haben und auch auf diesem Wege zu den Doppeltangenten gelangen. Ich habe hiezu verschiedene Vorschläge, deren vollständige Ausführung ich mir für die Zukunft aufbewahre. Eine sehr ausgedehnte Anwendung der Functionen S und T leitet mich hiebei vorzugsweise, diese treten bei den Curven vierten Grades hervor, wenn man ihre Polarcurven dritten Grades betrachtet. [2.]

Ich werde mir hierüber in der Folge nähere Mittheilungen erlauben,

wenn ich Ihnen erst die Richtung meiner jetzigen Untersuchungen angegeben habe, was den Raum dieses Briefes in Anspruch nehmen dürfte.

Im Journal „The Cambridge (and Dublin) Mathematical Journal Vol. V. oder neue Folge Vol. I. 1846. S. 97“, welches ich vor einigen Tagen endlich erhalten habe, befindet sich die *Cayley*sche Darstellung der Curven dritten Grades in Liniencoordinaten. *Cayley* hat sogar die mit der Ihrigen übereinstimmende resultirende Systemsdeterminante vollständig berechnet, und sie nimmt den Raum von zwei Octavseiten in ca. 80 Zeilen ein. Indessen dürfte der Nutzen, den die Zerlegung der Function in ihre kleinsten Elemente gewährt, sehr gering sein, da man mit einer so grossen Form nicht weiter operiren kann. Ob sich die für die Beantwortung vieler Fragen sehr wichtige Determinantenform zur Darstellung der Eliminationsresultate in letzter Instanz immer eignet, kann überhaupt bezweifelt werden; da auch die Elementarfunctionen, aus denen die Eliminationsresultate sich zusammen setzen lassen, und deren Beibehaltung zweckmässig ist, aufgelöst erscheinen. Anders stellt es sich freilich heraus, wenn es möglich ist, das Eliminationsresultat als eine solche Determinante anzugeben, deren Componenten die charakteristischen Elementarfunctionen sind. Die Darstellung der Fundamentalverbindungen überhaupt ist der wesentlichste Theil meiner ausführlichen Abhandlung, und ich setze auch aus solchen die genannte Function sechsten Grades zusammen, ohne die Systemsdeterminante benutzen zu dürfen. Die erhaltene Form eignet sich auch zu weiteren Operationen da sie eine geschlossene ist, und ich würde sie Ihnen gerne angeben, wenn ich wüsste, dass es Ihnen wegen Ihrer noch zu publicirenden Abhandlung darüber nicht unangenehm wäre. Auch die Darstellung der analogen Function zwölften Grades für die Curven vierten Grades ist durch Elementarverbindungen ohne Benutzung einer Determinante möglich und ich erhalte eine nicht uninteressante Endform für dieselbe.

Die Basis für Untersuchungen dieser Art entnehme ich aus der Transformation durch lineäre Substitutionen oder geometrisch durch Benutzung der Centralperspective, welches Kapitel, trotz seiner vielfältigen Anwendung immer noch nicht ganz ausgebeutet ist. Schon *Newton* hat die Bemerkung gemacht, dass nicht alle Curven dritten Grades in ein und demselben Kegel dritten Grades sich befinden. Wenn daher $f = 0$, $f_1 = 0$ zwei beliebige Curven n-ten Grades bezeichnen, wo $n > 2$ ist, so kann man nach den Bedingungen zwischen den Coefficienten von f und f_1 fragen, damit

beide durch Centralperspective in einander übergehen können, oder um mich deutlicher auszudrücken, damit es möglich ist, einen Augenpunkt und eine Lage der einen Curve im Raume zu finden, so dass vom ersteren aus die eine Curve als Projection der anderen erscheint. Es ist bekannt, dass analytisch das Problem darauf hinauskömmt, durch lineäre Substitutionen eine homogene Function des n-ten Grades in eine andere gegebene zu transformiren, und es handelt sich hier darum, die Relationen zwischen den Coefficienten zweier *allgemeinen* Functionen zu kennen, damit dies möglich sei. Man kann das Problem analytisch auf jede Anzahl von Variabeln ausdehnen. Für drei Variabeln hat die Function $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Coefficienten, und es giebt 9 Substitutionscoefficienten, man erhält daher zwischen den Coefficienten der gegebenen beiden Functionen und den 9 Substitutionscoefficienten $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Gleichungen, aus welchen sich $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 9$ Bedingungen ergeben, wenn man sich die Substitutionscoefficienten eliminirt denkt. Für die Curven dritten Grades erhält man daher nur eine Bedingungsgleichung und diese ist $S_1^3 T^2 - S^3 T_1^2 = 0$, indem man aus den Gleichungen (19.) und (22.) meiner Abhandlung: $S_1 = r^4 S$, $T_1 = r^6 T$ die Grösse r eliminirt. Die Wichtigkeit dieser Relation besteht darin, dass man die Bildung aller Verbindungen wie R daraus gewinnt. Hiezu hat man sich nur eine transformirte Form zu verschaffen, für welche R verschwindet, was in der Regel sehr leicht ist. Eine solche ist z. B.

$$y_1^3 + y_2^3 + 6\pi y_1 y_2 y_3,$$

für diese erhält man

$$S_1 = 4\pi^4, \qquad T_1 = 8\pi^6,$$

daher

$$0 = S_1^3 T^2 - S^3 T_1^2 = 64\pi^{12}(T^2 - S^3)$$

und da π nicht verschwindet, so muss mit R auch $T^2 - S^3$ verschwinden, woraus $R = T^2 - S^3$ folgt, weil die Function vom zwölften Grade ist. Ferner ist die Relation zur Ermittelung der Coefficienten der transformirten Form wichtig, denn wenn man die Function in $y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + 6\pi y_1 y_2 y_3$ transformiren will, so erhält man

$$S_1 = 4\pi^4 - 4\pi, \qquad T_1 = 8\pi^6 + 20\pi^3 - 1,$$

was die Gleichung

$$S_1^3 T^2 - S^3 T_1^2 = (4\pi^4 - 4\pi)^3 T^2 - (8\pi^6 + 20\pi^3 - 1)^2 S^3 = 0$$

giebt, welche sich in drei biquadratischen Factoren zerlegen lässt, wie ich in meinem vorigen Schreiben angegeben habe. Auf dem angegebenen Wege habe ich mehrere wichtige Verbindungen wie S_b und T_b in Nr. 44 meiner Abhandlung ermittelt.

Hierdurch kann man Probleme, welche von anderer Seite her betrachtet schwierig erscheinen, leicht lösen, wenn man erst im Besitze der Gesetze sich befindet, nach welchem die Fundamentalverbindungen gebildet werden. Andererseits ergeben sich daraus geometrische Sätze für die Anwendung der Centralperspective und für die Curven überhaupt. Die Verbindungen in jedem Falle zu ermitteln ist das Ziel meiner Untersuchungen, es scheint jedoch nicht zweckmässig zu sein aus den genannten $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Gleichungen die Substitutionscoefficienten zu eliminiren. Einige der entsprechenden Verbindungen für die Functionen vierten Grades, sowie die Resultate für die des dritten Grades habe ich durch einfachere Mittel gewonnen, die Betrachtung des Eliminationsproblems ist jedoch für viele Fragen wichtig und entscheidend.

Die Functionen, welche den S und T analog sind, bilden nur eine Klasse der wichtigen Verbindungen, auf diese allein haben *Cayley* und andere ihre Aufmerksamkeit gerichtet; späterhin [3.] hat *Eisenstein* in Folge der *Cayley*schen Untersuchungen, die sich jedoch nur auf Functionen von zwei Variabeln erstrecken, die Aufgabe gestellt, solche Verbindungen aus den Coefficienten der transformirten Form einer homogenen Function zu bilden, welche sich in zwei Factoren zerfällen lassen, von denen der eine eine Potenz der Determinante der Substitutionscoefficienten ist, während der andere die analoge Verbindung der ursprünglichen Form wird. (*Crelle*s Journal, Bd. 35. Aufgabe.) Aus der bekannten Bedingungsgleichung, dass eine algebraische Gleichung zwei gleiche Wurzeln besitze, welche Bedingungsgleichung immer die genannte Transformationseigenschaft hat, und aus der von *Boole* herrührenden Bemerkung *Cayley*s im 30. Bd. S. 19, dass die in Rede stehende Bedingung für die biquadratische Gleichung aus der Summe von zwei Verbindungen besteht, die für sich die definirte Eigenschaft haben, war es leicht den Schluss zu ziehen, dass Aehnliches für Functionen von mehr Variabeln gelten würde und dies veranlasste die *Eisenstein*sche Aufgabe. *Eisenstein* nennt die Verbindungen „Fundamentaldeterminanten“, ich werde diese Benennung in der Folge beibehalten.

Eine klare Vorstellung von der eigentlichen Wichtigkeit solcher Untersuchungen konnte ich aus dem Vorhandenen nicht gewinnen. Eine wiederholte und vielfältige Verarbeitung des durch die Functionen dritten Grades dargebotenen Stoffes führte mich zu den Vorstellungen, die ich jetzt davon habe, und meistentheils Ihre Abhandlungen, sowie schon früher Ihre Vorlesungen führten mich auf den Weg, der die Geometrie zum Ausgangspunkte nimmt. Wollen Sie meiner Versicherung Glauben schenken, dass ich mich oft Ihrer dankbarlichst hiebei erinnert habe.

Für die Bedingungsgleichungen, dass zwei Curven durch Centralperspective in einander übergehen, scheinen noch keine Untersuchungen vorhanden zu sein. Auch die Fundamentaldeterminanten betrachte ich von einer anderen Seite als das *Eisenstein*sche Problem es erfordert. Es ist mir nicht die angegebene Eigenschaft dieser Function so wichtig, wie die Gleichung $S_1 - r^4 S = 0$ als Eliminationsresultat, und ich denke mir dasselbe hervorgehend aus den angegebenen $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Gleichungen, wenn man noch die Gleichung $\Sigma \pm x_1^{(1)} x_2^{(2)} x_3^{(3)} = r$ hinzufügt, in welcher $x_\varkappa^{(\lambda)} \ldots$ die Substitutionscoefficienten bezeichnen, während r eine gegebene Constante ist. Man erhält auf diese Weise für den dritten Grad elf Gleichungen mit neun Unbekannten. Bei dieser Darstellungsweise liegt es auf der Hand, dass man statt der Determinante jede andere Function der Substitutionscoefficienten einer gegebenen Constanten gleichsetzen könnte, wodurch man zu anderen Verbindungen gelangt und mehreren, wenn man mehr ähnliche Bedingungsgleichungen hinzufügt. Hierdurch tritt die wesentliche Veränderung ein, dass man von den resultirenden Gleichungen nicht gerade zu verlangen braucht, dass sie in Bezug auf *r reine* seien, wie $S_1 - r^4 S = 0$ eine reine biquadratische Gleichung ist. Dass Letzteres stattfindet, ist sehr wünschenswerth, und es ist gar keine Frage, dass solche Verbindungen andern vorzuziehen sind; wenn aber die Natur eines Problems keine reine Gleichung erfordert, so wird man vergebliche Mühe auf ihre Ermittelung verwenden. Die vorhandene Betrachtungsweise hat mehr zahlentheoretische Richtung, die angegebene erfordert den algebraischen oder geometrischen Standpunkt. [4.]

Die angegebenen Principien habe ich noch verallgemeinert, und ich werde mir in der Zukunft nähere Mittheilungen darüber erlauben. Ich erhalte dann die vorhin genannten Functionen sechsten und zwölften Grades, welche die Darstellung der Curven dritten und vierten Grades in Linien-

coordinaten geben. Als Beispiel hierfür bietet sich ein Problem dar, welches Ihnen, wie ich aus Ihrer Abhandlung des 36. Bandes ersehe, nicht uninteressant sein dürfte.

Wenn ich Ihre Bezeichnung S. 154 beibehalte, so hängt die Lösung des siebzehnten Problems davon ab, die Grössen b_1, b_2, b_3 als Functionen von a_1, a_2, a_3 und den Constanten von v darzustellen. Da diese irrational sind, so wird es zunächst wichtig sein, die umgekehrte Aufgabe zu lösen, nämlich die Grössen a_k als Functionen der b_k und der Coefficienten von v darzustellen, was auf rationale Ausdrücke führt und erreicht wird, wenn man v auf die Form bringt

$$\psi + (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2,$$

wo ψ eine in drei lineare Factoren zerlegbare Function ist. Dieses Problem befindet sich auch im *Plücker*, aber wie gewöhnlich unausgeführt. Um den gemeinschaftlichen Nenner I' zu vermeiden, sei $v \cdot I'$ der vorhin genannten Form gleich. Ich habe die Coefficienten derselben in ihrer, wie ich glaube, einfachsten und schliesslichen Endform dargestellt und finde, dass in Bezug auf b_1, b_2, b_3 die Grössen a_k homogen und vom vierten Grade, die Coefficienten von ψ homogen und vom sechsten Grade sind, ferner in Bezug auf die Coefficienten von v alle homogen und vom fünften Grade, und dass der gemeinschaftliche Nenner I' die in Liniencoordinaten transformirte Function v ist, wenn man statt der Coordinaten b_1, b_2, b_3 substituirt. [5.] Für die Untersuchungen dieser Art erhalte ich aus den angegebenen Principien einen sehr wichtigen Satz, welcher sich bei drei Variabeln auf die Curven bezieht, die mit zwei gegebenen *gleichzeitig* durch Centralperspective in einander übergehen, oder um mich deutlicher auszudrücken, wenn $f = 0$ durch Centralperspective in $f_1 = 0$ übergeht, so giebt es auch Curven wie $\Delta f = 0$ und $\Delta f_1 = 0$ die gleichzeitig in einander übergehen. Für die Functionen dritten Grades auch für höhere ist immer die Functionaldeterminante von dieser Natur, daher auch $\Delta\Delta f$, und für den dritten Grad haben Sie das Letztere dadurch bewiesen, dass sie die Form $af + b\Delta f$ für $\Delta\Delta f$ angegeben haben. Für diese Function versteht es sich immer von selbst. Es giebt aber noch viele andere und man kann fragen, welches ist die grösstmöglichste Anzahl derjenigen, aus welchen sich die übrigen zusammensetzen lassen? Wenn man das Problem auf beliebig viele Variabeln ausdehnt, so finde ich, dass die Anzahl dieser Functionen unabhängig ist von dem Grade von f und *der Anzahl der Variabeln gleich* ist, wenn man f selbst zu den Functionen

hinzuzählt. Es geht hieraus hervor, dass sich auch für Curven n-ten Grades $\Delta\Delta f$ aus f, Δf und einer dritten zusammensetzen lässt. Ob dieses schon aus f und Δf allein möglich ist, folgt aus diesem Satze nicht, es könnte aber der Coefficient der dritten Function der Null gleich sein, wodurch der Satz immer noch bestehen bleibt, wie es für den dritten Grad wirklich der Fall ist.

Für die Curven und Flächen entsteht nun die Fundamentalaufgabe, die einfachsten beiden Functionen im ersten, und die einfachsten drei Functionen im zweiten Falle zu kennen, welche zu f hinzugefügt, das System derjenigen geben, aus welchen sich die übrigen zusammensetzen lassen. Einfachste Functionen nenne ich diejenigen, welche sowohl in Bezug auf die Constanten von f, als in Bezug auf die Variabeln vom niedrigsten Grade sind. Es versteht sich von selbst, dass die in Rede stehenden Functionen in doppelter Anzahl vorhanden sind, je nachdem man die Basis f in Punkt- oder Liniencoordinaten darstellt, und die einfachste derselben in Punktcoordinaten ist nicht gleichzeitig die einfachste, wenn man sie in Liniencoordinaten transformirt hat. In meiner Abhandlung gebe ich die vollständige Darstellung des Problems für die Curven dritten Grades. Man erhält hier ausser f und Δf noch eine dritte Function θf. Eine beliebige dieser Functionen kann man sich leicht verschaffen, es frägt sich nur, welches die einfachste derselben ist. Ich halte für eine solche eine Function sechsten Grades, deren Coefficienten vom achten Grade sind. Der sechste Grad der Variabeln ist nothwendig und es könnte höchstens θf die Form haben

$$\theta f = Af^2 + 2Bf\Delta f + C\Delta f^2 + D\cdot Hf,$$

wo A, B, C, D Functionen der Coefficienten von f allein sind, und Hf eine neue Function des sechsten Grades bezeichnet, welche einfacher wäre als θf. Indessen finde ich für Hf nur Functionen, welche ebenso complicirt sind oder noch mehr als θf. [6.] Bezeichnet man $\frac{1}{6}\frac{\partial^2 f}{\partial x_\varkappa \partial x_\lambda}$ durch $f''(x_\varkappa, x_\lambda)$, $\frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial x_\varkappa}$ durch $f'x_\varkappa$, ferner durch $U^{\varkappa\lambda}$ die doppelten partiellen Determinanten aus den Grössen $f''(x_\varkappa, x_\lambda)$, so dass z. B.

$$\tfrac{1}{2}U^{11} = f''(x_2, x_2)f''(x_3, x_3) - f''(x_2, x_3)f''(x_2, x_3),$$
$$\tfrac{1}{2}U^{12} = f''(x_2, x_3)f''(x_1, x_3) - f''(x_3, x_3)f''(x_2, x_1)$$

u. s. w. ist, so erhält man

$$\Delta f = \frac{1}{6^2} \Sigma \pm \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = \Sigma U^{\varkappa,\lambda} \cdot f''(x_\varkappa, x_\lambda),$$

und $$\Theta f = \Sigma \cdot U^{\varkappa,\lambda} \cdot \Delta f' x_\varkappa \cdot \Delta f' x_\lambda,$$

wenn $\Delta f' x_\varkappa$ ebenfalls $= \frac{1}{3} \frac{\partial \Delta f}{\partial x_\varkappa}$ ist, und nimmt man an, dass durch Vertauschung von $\Delta f''(x_\varkappa, x_\lambda)$ mit $f''(x_\varkappa, x_\lambda)$, $U^{\varkappa,\lambda}$ in $V^{\varkappa,\lambda}$ übergeht, so ist die Function $Hf = \Sigma V^{\varkappa,\lambda} f' x_\varkappa f' x_\lambda$ gleichzeitig brauchbar, aber nicht einfacher als Θf und es ist $\Theta f = 2Sf \cdot \Delta f - 2T\Delta f^2 + Hf$. Die Function $\Sigma U^{\varkappa,\lambda} f' x_\varkappa \cdot f' x_\lambda$ wäre einfacher, sie ist aber aus f und Δf zusammengesetzt, wie Sie sich leicht überzeugen können.

Eine Anwendung hievon bietet sich bei der Ermittelung der Gleichung dar, welche das Product der neun Wendetangentengleichungen liefert. Diese sei $Wf = 0$, so ist Wf vom neunten Grade, und weil sie sich aus $f, \Delta f, \Theta f$ zusammensetzen lassen muss, von der Form

$$Wf = Af^3 + 3Bf^2 \cdot \Delta f + 3Cf \cdot \Delta f^2 + D\Delta f^3 + \Theta f(E \cdot f + G \cdot \Delta f)$$

und man findet

$$Wf = 27 \cdot f \cdot \Theta f - 72 \cdot S \cdot f^2 \cdot \Delta f - \Delta f^3,$$

oder wenn man Hf einführt

$$Wf = -54f \cdot Hf - 54T \cdot f^3 - 18S \cdot f^2 \cdot \Delta f - \Delta f^3.$$

Es wird Ihnen nicht uninteressant sein, einige geometrische Sätze aus den vorstehenden Formen zu entnehmen, deren Vervollständigung erst durch die entsprechenden Verbindungen in Liniencoordinaten möglich ist. Ich fürchte die Gränzen eines Briefes zu überschreiten, wenn ich hierauf, sowie auf die nähere Discussion der Functionen Θf, Hf und ähnliche eingehen wollte, da ich ihre Geduld schon zu sehr in Anspruch genommen habe.

Es bleibt mir noch übrig, Sie auf einen Druckfehler meiner Abhandlung aufmerksam zu machen. In der ersten Formel S. 17, in welcher die Grössen $q_{\varkappa,\lambda,\mu}$ als Functionen der $p_{\varkappa,\lambda,\mu}$ dargestellt sind, hat der Setzer die sämmtlichen obern Indices der Ausdrücke $(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa,\lambda}$ mit den untern vertauscht.

Ausserdem ersuche ich Sie zur Darstellung von T lieber die *Vertical*zeilen des Systems 20. S. 14 zu nehmen. Wegen eines, vielleicht unbegründeten Bedenkens, zu dessen Erledigung ich mir noch keine Zeit nehmen konnte, und welches sich auf die Gleichung $\tau_{\varkappa,\lambda} = \tau_{\lambda,\varkappa}$ bezieht, habe ich augenblicklich für die *Horizontal*zeilen nicht dieselbe Sicherheit, welche für die Verticalzeilen vorhanden ist. [7.]

Ihren gütigen Mittheilungen sehe ich mit grosser Spannung entgegen, und Sie würden mich sehr erfreuen, wenn Sie geneigt wären, die hiezu zu verwendende Mussestunde auf eine nicht zu ferne Zeit zu verlegen, und wollen Sie der Ungunst der angegebenen äusseren Umstände es geneigtest zur Last legen, dass ein so langer Zeitraum zwischen Ihrem werthen Schreiben und dem heutigen Tage möglich wurde.

In vollkommenster Hochachtung

Berlin, den 18. December 1849.

Ihr

S. Aronhold.

Herrn Professor *Richelot* bitte ich gefälligst zu grüssen, und mitzutheilen, dass ich sehr bald an ihn schreiben werde.

Anmerkungen.

[1.] Man vergleiche hierzu die Arbeit *Hesses* „Ueber die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung." Bd. 49 dieses Journals S. 279ff. Ferner *Aronhold:* Berliner Monatsberichte 1864. S. 499.

[2.] Die Durchführung dieses Gedankens kann man bei *Clebsch* in Bd. 59 dieses Journals SS. 40—44 vergleichen.

[3.] Es dürfte als sicher anzunehmen sein, dass im Gegentheil *Eisenstein* durch seine Arbeiten über binäre cubische Formen (Dieses Journal Bd. 27, S. 319ff.) „*Cayley* und Andere" zu ihren Untersuchungen angeregt hat. Die von *Eisenstein* gestellte Aufgabe befindet sich in diesem Journal Bd. 35, S. 275.

[4.] Cf. *Jacobis* Theorie der Centralprojection, dieses Journal, Bd. 8 S. 338ff. Vielleicht hat auch *Möbius* Einfluss geübt.

[5.] Die hier von *Aronhold* angeregte Aufgabe ist von dem Herausgeber dieses Schreibens im Jahre 1874 (Math. Ann. Bd. 8 S. 143) gelöst worden. Unter Anwendung der daselbst gegebenen Bezeichnungen wird für

$$\Delta = -\tfrac{1}{4}\Sigma \frac{\partial \Theta}{\partial x_i}\frac{\partial \Sigma}{\partial u_i} + \tfrac{1}{2} T u_x$$

das Product aus den Gleichungen der drei Tangenten an die Grundcurve f in deren Schnittpunkten mit

$$u_x \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

von der Form $fF - \Delta u_x^2 = 0$, sodass also $\Delta = 0$ die „Begleiterin"

von $u_x = 0$ ist. Da überdies $\Delta_{xf+\lambda\Delta} = G(x\lambda)(x\Delta + \lambda M)$, so bilden ***sämmtliche Begleiterinnen einer festen Geraden*** $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ ***in Bezug auf den Büschel*** $xf + \lambda\Delta = 0$ ***einen zu diesem projectiven Strahlenbüschel.*** (l. c. p. 142).

[6.] Eine wichtigere Covariante als die *Aronhold*sche θf ist bekanntlich die *Brioschi*sche Combinante sechsten Grades ψ.

[7.] Die Bedenken *Aronhold*s waren nicht gerechtfertigt. Cfr. Dieses Journal, Bd. 55 S. 155.

III.

Berlin, den 7. Februar 50. [1.]

Hochgeehrter Herr Professor!

Aus Ihrem werthen Schreiben entnehme ich, dass meine Darstellungen im *Crelle*schen Journale nicht so klar sind, wie ich wünschte. Ich fühlte das schon selbst und wollte Sie bitten, es der Erstlingsarbeit zu Gute zu halten. Um Ihnen nun schon früher als Herr *Crelle* für gut findet, eine bessere Einsicht in diese Entwickelungen zu verschaffen, habe ich vor einiger Zeit die beifolgende Darstellung der Functionen S und T, sowie von $\Delta(af + b\Delta f)$ meiner Abhandlung entnommen, um sie Ihnen bei Gelegenheit zu übersenden. Eine solche bietet sich heute dar. Da mir jedoch sowohl Raum als Zeit nur kärglich zugemessen sind, so erlaube ich mir nur noch folgende Bemerkungen:

Aus den in meinem vorigen Schreiben entwickelten Principien gehen die meisten Darstellungen der Theorie a posteriori hervor, welche man wenigstens am Hauptproblem a priori durchführen kann. Es lässt sich hiezu jeder Ausgangspunkt benutzen und ich wählte denjenigen, welcher gleichzeitig einer Verallgemeinerung fähig ist, nämlich die Bildung von $\Delta(af + b\Delta f)$. Die anliegende Darstellung besteht aus zwei Theilen, aus dem als Fundamentaltheorem bezeichneten Satz, und dessen Anwendung. Die letztere ist ohne Kenntniss des Beweises des ersteren möglich, daher habe ich den Beweis späteren Mittheilungen vorbehalten, weil ich beides nicht zugleich in einem Briefe geben konnte. Das Theorem ist in sich abgeschlossen und kann daher ganz für sich behandelt werden, und es ist interessanter zuvor die Anwendung desselben zu wissen.

In Bezug auf Ihre gütige Mittheilung über die Gleichung

$$\omega = au + bv$$

für Functionen n-ten Grades bemerke ich, dass zwar ***Cayley*** im 34. Bande von ***Crelle,*** ich glaube S. 36, [2.] . . . . . die wahrscheinliche Richtigkeit des Satzes proclamirt hat, dass ich mich aber dadurch nicht irritiren liess, obwohl mir auch keine Beweise für das Gegentheil bekannt waren. Mein Standpunkt in der Sache geht so weit, dass ich nachweisen kann und zwar vermittelst der anliegenden Principien, dass wenn man die dritten Differentialquotienten von u ohne den Zahlenfactor, und aus ihnen S und T bildet, die ich dann durch S_u und T_u bezeichnen will, während

$$\Delta u = \frac{6\,\Sigma \pm \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_1} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_3}}{\{(3n-6)(3n-7)\}^3}$$

ist, unter allen Umständen die Gleichung gilt

$$(3n-7)^3 \Delta\Delta u = 8(n-2)^3 (3u \cdot S_u^2 - 2\Delta u \cdot T_u) + (n-3)\Psi u$$

wo Ψu eine neue Function ist, deren Zusammensetzung aus Elementarfunctionen mir bisher noch nicht gelungen ist, obwohl ich sie explicite bilden kann.

Aus Ihrer Angabe entnehme ich nun, dass Ψu nicht die Form $au + b\Delta u$ enthalten kann, worüber ich bisher in Ungewissheit lebte. Die Rechnung, welche Sie zum Beweise führen, ist mir bis jetzt nicht ganz gelungen.

Entschuldigen Sie gütigst die Flüchtigkeit dieses Schreibens, und genehmigen Sie den Ausdruck der vollkommensten Hochachtung

Ihres ergebensten

S. Aronhold.

Meine mathematischen Beschäftigungen haben mich bisher immer noch verhindert das Oberlehrerexamen zu machen. Ich bemerke dies wegen der Adresse Ihres Briefes.

In der Folge werde ich mich einiger Umformungen und Bezeichnungen bedienen, die ich zunächst kurz anführen will.

Die Bezeichungen

$$(aa)^{\varkappa\lambda},\quad (bb)^{\varkappa\lambda},\quad (cc)^{\varkappa\lambda},\quad (bc)^{\varkappa\lambda},\quad (ac)^{\varkappa\lambda},\quad (ab)^{\varkappa\lambda},$$

wenn $a_{\varkappa\lambda}$, $b_{\varkappa\lambda}$, $c_{\varkappa\lambda}$ die Coefficienten von drei homogenen Functionen zweiten Grades dreier Variabeln sind, kann ich wohl von meiner Abhandlung her [3.] als bekannt voraussetzen. Durch $(a\,b\,c)$ soll die Function $\Sigma (ab)^{\varkappa\lambda} c_{\varkappa\lambda}$ bezeichnet werden, von der leicht ersichtlich ist, dass sie in Bezug auf die

drei Systeme $a_{k\lambda}$, $b_{k\lambda}$, $c_{k\lambda}$ symmetrisch ist, so dass

(1.) $$(abc) = \Sigma (ab)^{\varkappa\lambda} c_{\varkappa\lambda} = \Sigma (ac)^{\varkappa\lambda} b_{\varkappa\lambda} = (bc)^{\varkappa\lambda} a_{\varkappa\lambda}$$

geschrieben werden kann. Diese Vertauschung ist besonders zu beachten, weil sie in der Folge häufig zur Anwendung kommt.

Setzt man $a_{\varkappa\lambda} = b_{\varkappa\lambda} = c_{\varkappa\lambda}$, so geht (1.) über in

(2.) $$(aaa) = \Sigma (aa)^{\varkappa\lambda} a_{\varkappa\lambda} = 6 \cdot \Sigma \pm a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$$

($\Sigma \pm$ ist Determinantenzeichen), weil $(aa)^{\varkappa\lambda}$ die *doppelten* partiellen Determinanten der $a_{\varkappa\lambda}$ sind, z. B. $(aa)^{11} = 2(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{23})$.

Wenn man (abc) nach der Constante $a_{\varkappa\lambda}$ allein differenzirt, so soll dies durch d_a bezeichnet werden, die analoge Bedeutung hat d_b und d_c, d bedeutet das totale Differential $= d_a + d_b + d_c$. Es ist demnach

(3.) $$d_a(abc) = \Sigma (bc)^{\varkappa\lambda} da_{\varkappa\lambda} = \Sigma (b, da)^{\varkappa\lambda} c_{\varkappa\lambda} = \Sigma (c, da)^{\varkappa\lambda} b_{\varkappa\lambda}$$

(wegen (1.)),

(4.) $$d(abc) = \Sigma (bc)^{\varkappa\lambda} da_{\varkappa\lambda} + \Sigma (ac)^{\varkappa\lambda} db_{\varkappa\lambda} + \Sigma (ab)^{\varkappa\lambda} dc_{\varkappa\lambda},$$

mithin

(5.) $$d(aac) = 2\Sigma (ac)^{\varkappa\lambda} da_{\varkappa\lambda} + \Sigma (aa)^{\varkappa\lambda} dc_{\varkappa\lambda}$$

und

(6.) $$d_a(aac) = 2\Sigma (ac)^{\varkappa\lambda} da_{\varkappa\lambda},$$

endlich

(7.) $$d(aaa) = 3\Sigma (aa)^{\varkappa\lambda} da_{\varkappa\lambda}.$$

Wenn die Coefficienten $a_{1\varkappa\lambda}$, $a_{2\varkappa\lambda}$, $a_{3\varkappa\lambda}$ als die Systeme a_1, a_2, a_3 bezeichnet werden, so sind die Functionen $(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}$ den angeführten $(ab)^{\varkappa\lambda}$ entsprechend. Ihre Anzahl beträgt 36, während sie nur von 10 Grössen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ abhängen. Hieraus geht hervor, dass zwischen denselben Relationen Statt finden, welche zu dem folgenden Fundamentaltheorem für die Functionen dritten Grades führen.

I. Wenn man durch

$$U_{11}, U_{22}, U_{33}, U_{23}, U_{13}, U_{12}; \qquad V_{11}, V_{22}, V_{33}, V_{23}, V_{13}, V_{12},$$

zwei Systeme beliebiger Variabeln bezeichnet, welche den sechs lineären Gleichungen

(8.) $$\begin{cases} V_{\varrho\sigma} = (a_\varrho a_\sigma)^{11} U_{11} + (a_\varrho a_\sigma)^{22} U_{22} + (a_\varrho a_\sigma)^{33} U_{33} \\ \qquad + 2(a_\varrho a_\sigma)^{23} U_{23} + 2(a_\varrho a_\sigma)^{13} U_{13} + 2(a_\varrho a_\sigma)^{12} U_{12} \end{cases}$$

Genüge leisten, so bilden die Auflösungen dieses Systems nach den Grössen

$U_{\varkappa\lambda}$, nach Abtrennung eines Factors, der in Bezug auf die Coefficienten $a_{\varkappa\lambda\mu}$ vom achten Grade ist, das folgende System

$$(9.)\qquad \begin{cases} S\cdot U_{\varrho\sigma} = (a_\varrho a_\sigma)^{11} V_{11} + (a_\varrho a_\sigma)^{22} V_{22} + (a_\varrho a_\sigma)^{33} V_{33} \\ \qquad + 2(a_\varrho a_\sigma)^{23} V_{23} + 2(a_\varrho a_\sigma)^{13} V_{13} + 2(a_\varrho a_\sigma)^{12} V_{12}, \end{cases}$$

in welchem die Coefficienten sowohl dem Werthe nach, als in Bezug auf ihre Reihenfolge mit den Coefficienten des ursprünglichen Systems übereinstimmen.

Hieraus gehen die sechs Darstellungen von S hervor, wenn man (8.) in (9.) hineinsubstituirt, nämlich

$$S = \Sigma (a_\varrho a_\varrho)^{\varkappa\lambda} (a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\varrho}, \qquad S = 2\Sigma (a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} (a_{\varkappa\lambda})^{\varrho\sigma}$$

und überdies noch

$$0 = \Sigma (a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} (a_{\varkappa\lambda})^{\varrho_1\sigma_1},$$

so oft ϱ, σ nicht ϱ_1, σ_1 gleich ist. Die vollständige Determinante des achten Systemes ist S^3. [5.]

Es sei

$$u = \Sigma a_{\varkappa\lambda\mu} x_\varkappa x_\lambda x_\mu; \qquad \Delta u = v = \Sigma\cdot b_{\varkappa\lambda\mu} x_\varkappa x_\lambda x_\mu$$

$$u_\varrho = \tfrac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x_\varrho}, \quad u_{\varrho\sigma} = \tfrac{1}{6}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\varrho \partial x_\sigma}; \qquad v_\varrho = \tfrac{1}{3}\frac{\partial v}{\partial x_\varrho}, \quad v_{\varrho\sigma} = \tfrac{1}{6}\frac{\partial^2 v}{\partial x_\varrho \partial x_\sigma}$$

so gilt folgender Satz:

II. Wenn man in dem System (8.) *statt der Grössen $U_{\varrho\sigma}$ die entsprechenden $u_{\varrho\sigma}$ substituirt, so gehen gleichzeitig die Grössen $V_{\varrho\sigma}$ in $v_{\varrho\sigma}$ über.*

Hieraus geht dann hervor, dass dasselbe für das System (9.) gilt.

Zum Beweise ist zu bemerken, dass

$$v = 6\Sigma \pm u_{11}\cdot u_{22}\cdot u_{33} = \Sigma (uu)^{\varkappa\lambda} u_{\varkappa\lambda}$$

wegen (2.) ist, wenn man dort statt der Grössen $a_{\varkappa\lambda}$ die Grössen $u_{\varkappa\lambda}$ setzt. Hieraus folgt wegen (7.)

$$dv = 3\Sigma (uu)^{\varkappa\lambda} du_{\varkappa\lambda} = 3\Sigma (uu)^{\varkappa\lambda} (a_{1\varkappa\lambda} dx_1 + a_{2\varkappa\lambda} dx_2 + a_{3\varkappa\lambda} dx_3),$$

weil

$$u_{\varkappa\lambda} = a_{1\varkappa\lambda} x_1 + a_{2\varkappa\lambda} x_2 + a_{3\varkappa\lambda} x_3.$$

Da aber

$$dv = 3\{v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3\},$$

so folgt durch Vergleichung der Coefficienten von dx_ϱ

$$v_\varrho = \Sigma (uu)^{\varkappa\lambda} a_{\varrho\varkappa\lambda}.$$

Differenzirt man v'_ϱ noch einmal, aber nur nach den Variabeln, d. h. in Bezug auf $u_{\varkappa\lambda}$; so gilt die Gleichung 6. Daher

$$dv_\varrho = 2\Sigma(u_1\,du)^{\varkappa\lambda}\,a_{\varrho\varkappa\lambda} = 2\Sigma(u_1 a_\varrho)^{\varkappa\lambda}\,du_{\varkappa\lambda}$$

wegen (1.). Aber

$$dv_\varrho = 2(v_{1\varrho}\,dx_1 + v_{2\varrho}\,dx_2 + v_{3\varrho}\,dx_3);\quad du_{\varkappa\lambda} = a_{1\varkappa\lambda}\,dx_1 + a_{2\varkappa\lambda}\,dx_2 + a_{3\varkappa\lambda}\,dx_3;$$

daher durch Vergleichung der Coefficienten von dx_σ

$$(10.)\qquad v_{\varrho\sigma} = \Sigma(u_1 a_\varrho)^{\varkappa\lambda}\,a_{\sigma\varkappa\lambda} = \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}\,u_{\varkappa\lambda}$$

wegen (1.)

Da nun die rechte Seite von (8.) in die rechte von (10.) übergeht, sobald man $U_{\varkappa\lambda} = u_{\varkappa\lambda}$ setzt, so folgt der Satz. Man kann nun, wie bemerkt, auch dieselbe Substitution in (9.) machen und erhält dann

$$(11.)\qquad S\cdot u_{\varrho\sigma} = \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}\,v_{\varkappa\lambda}.$$

Die Gleichungen (10.) und (11.) sind identische, man erhält daher durch Vergleichung der Coefficienten von x_τ, nachdem man die Werthe für $u_{\varrho\sigma}$ und $v_{\varrho\sigma}$ substituirt hat, weil

$$u_{\varrho\sigma} = a_{1\varrho\sigma}x_1 + a_{2\varrho\sigma}x_2 + a_{3\varrho\sigma}x_3 \quad\text{und}\quad v_{\varrho\sigma} = b_{1\varrho\sigma}x_1 + b_{2\varrho\sigma}x_2 + b_{3\varrho\sigma}x_3$$

$$(12.)\qquad b_{\varrho\sigma\tau} = \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}\,a_{\tau\varkappa\lambda},$$

$$(13.)\qquad S\cdot a_{\varrho\sigma\tau} = \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}\,b_{\tau\varkappa\lambda}.$$

Da die Indices ϱ, σ, τ in beiden Gleichungen auf der linken Seite vertauscht werden können, so gilt dies auch für die rechte.

In Bezug auf (12.) ist dies a priori klar, für die dreizehnte Gleichung erhält man dadurch einen neuen Satz.

In der Folge werde ich die vorkommenden Functionen nach den Constanten $a_{\varkappa\lambda\mu}$ ***allein*** differenziren und statt der Incremente die entsprechenden $b_{\varkappa\lambda\mu}$ substituiren. Dies soll immer durch δ bezeichnet werden.

Da

$$\delta u = \delta\Sigma a_{\varkappa\lambda\mu}x_\varkappa x_\lambda x_\mu = \Sigma b_{\varkappa\lambda\mu}x_\varkappa x_\lambda x_\mu = v$$

ist, so hat man

$$(14.)\qquad \delta u = \Delta u = v.$$

Ich will nun $\delta v = \Sigma\delta b_{\varrho\sigma\tau}\,x_\varrho x_\sigma x_\tau$ bestimmen. Es ist

$$\begin{aligned}\delta b_{\varrho\sigma\tau} &= \delta\Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}\,a_{\tau\varkappa\lambda}\quad\text{(wegen (12.))}\\ &= \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}\,\delta a_{\tau\varkappa\lambda} + \Sigma(a_\varrho a_\tau)^{\varkappa\lambda}\,\delta a_{\sigma\varkappa\lambda} + \Sigma(a_\sigma a_\tau)^{\varkappa\lambda}\,\delta a_{\varrho\varkappa\lambda}\quad(\cdots 4),\\ &= \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}\,b_{\tau\varkappa\lambda} + \Sigma(a_\varrho a_\tau)^{\varkappa\lambda}\,b_{\sigma\varkappa\lambda} + \Sigma(a_\sigma a_\tau)^{\varkappa\lambda}\,b_{\varrho\varkappa\lambda}.\end{aligned}$$

Die drei Summen sind wegen (13.) gleich und $= S \cdot a_{\varrho\sigma\tau}$, daher

$$\delta b_{\varrho\sigma\tau} = 3\, S \cdot a_{\varrho\sigma\tau},$$

folglich

(15.) $$\delta v = 3\, S \cdot u.$$

III. Wenn man u und v nach den Coefficienten differenzirt und statt der Incremente die entsprechenden b substituirt, so gehen die Functionen in einander über und zwar ist

$$\underline{\delta u = v,} \qquad \underline{\delta v = 3\, S \cdot u.}$$

Es sei noch

(16.) $\delta S = 4T,$ (17.) $\delta T = 6Q,$

so sind T und Q neue Functionen der Coefficienten von dem sechsten und achten Grade.

Es ist

$$\Delta(au + bv) = 6\,\Sigma \pm (au_{11} + bv_{11})(au_{22} + bv_{22})(au_{33} + bv_{33}),$$

daher wegen (2.)

$$= (\Sigma au + bv, au + bv)^{\varkappa\lambda}(au_{\varkappa\lambda} + bv_{\varkappa\lambda}).$$

Entwickelt man nach dem *Taylor*schen Lehrsatz und berücksichtigt die Differentiation (6.), sowie (1.), so ist

$$\Delta(au + bv) = a^3 \Sigma (uu)^{\varkappa\lambda} u_{\varkappa\lambda} + 3a^2 b \Sigma (uu)^{\varkappa\lambda} v_{\varkappa\lambda} + 3ab^2 \Sigma (uv)^{\varkappa\lambda} v_{\varkappa\lambda} + b^3 \Sigma (vv)^{\varkappa\lambda} v_{\varkappa\lambda}.$$

Die Bestimmung der vier Coefficienten geschieht mit Hilfe von (14.) (15.) wie folgt:

(a.) $$\underline{\Sigma (uu)^{\varkappa\lambda} u^{\varkappa\lambda} = v}$$

$\delta v = \delta \Sigma (uu)^{\varkappa\lambda} u_{\varkappa\lambda} = 3\Sigma (uu)^{\varkappa\lambda} \delta u_{\varkappa\lambda} = 3\Sigma (uu)^{\varkappa\lambda} v_{\varkappa\lambda}$, weil $\delta u_{\varkappa\lambda} = v_{\varkappa\lambda}$ (14.), aber $\delta v = 3\, S \cdot u$ (15.), folglich

(b.) $$\underline{\Sigma (uu)^{\varkappa\lambda} v_{\varkappa\lambda} = S \cdot u.}$$

(b.) differenzirt giebt

$$\delta \Sigma (uu)^{\varkappa\lambda} v_{\varkappa\lambda} = \delta S \cdot u + S \cdot \delta u = 4Tu + Sv \quad (16.)$$

aber
$$\delta \Sigma (uu)^{\varkappa\lambda} v_{\varkappa\lambda} = 2\Sigma (uv)^{\varkappa\lambda} \delta u_{\varkappa\lambda} + \Sigma (uu)^{\varkappa\lambda} \delta v_{\varkappa\lambda} \quad (5.),$$
$$= 2\Sigma (uv)^{\varkappa\lambda} v_{\varkappa\lambda} + 3S\Sigma (uu)^{\varkappa\lambda} u_{\varkappa\lambda},$$

weil $\delta v_{\varkappa\lambda} = 3Su_{\varkappa\lambda}$ (15.), mithin

$$2\Sigma (uv)^{\varkappa\lambda} v_{\varkappa\lambda} = 4Tu + Sv - 3S\Sigma (uu)^{\varkappa\lambda} u_{\varkappa\lambda} = 4Tu + Sv - 3Sv,$$

daher

(c.) $$\underline{\Sigma (uv)^{\varkappa\lambda} v_{\varkappa\lambda} = 2Tu - Sv.}$$

Wenn man (c.) von Neuem differenzirt, so erhält man

$$\delta\Sigma (uv)^{\varkappa\lambda} v_{\varkappa\lambda} = 2\delta T \cdot u - \delta S v + 2\, T \cdot \delta u - \delta S \cdot v = (12\,Q - 3S^2)u - 2Tv$$

wegen (14.), (15.), (16.), (17.); aber

$$\delta\Sigma (uv)^{\varkappa\lambda} v_{\varkappa\lambda} = 2\Sigma (uv)^{\varkappa\lambda} \delta v_{\varkappa\lambda} + \Sigma (vv)^{\varkappa\lambda} \delta u_{\varkappa\lambda} \qquad (5.)$$
$$= 6S^2 u + \Sigma (vv)^{\varkappa\lambda} v_{\varkappa\lambda}$$

wegen (15.) und (b.), daher

(d.) $$\underline{\Sigma (vv)^{\varkappa\lambda} v_{\varkappa\lambda} = (12\,Q - 9S^2)u - 2Tv.}$$

Die Functionen S und T sind die in meiner Abhandlung aufgeführten, Q ist zusammengesetzt und zwar $\underline{Q = S^2}$. Der Beweis hierfür ergiebt sich aus nochmaliger Differentiation von (d.), was auf identische Gleichungen führt, da die Verbindungen der Grössen $u_{k\lambda}$ und $v_{k\lambda}$ erschöpft sind. Die Darstellung von T in meiner Abhandlung geht aus einer Reduction des Ausdruckes $\frac{1}{4}\delta S$ (16.), auf eine geringere Anzahl von Termen, hervor.

Anmerkungen.

[1.] ***Aronhold*** hatte offenbar irrthümlich 49 anstatt 50 geschrieben.

[2.] In Wirklichkeit steht die Stelle S. 44, Z. 8—10 v. u. l. c.

[3.] Cf. dieses Journal, Bd. 39, S. 140—160.

[4.] In den Gleichungen (4.)—(6.) hatte ***Aronhold*** mehrfach die oberen Indices $\varkappa\lambda$ weggelassen.

[5.] Es kann nach den von mir gegebenen Entwicklungen in „*Hesses* Ges. Werke. München 1897. In Commission des *Franz*schen Verlags“ S. 696 Z. 19 ff. keinem Zweifel unterworfen sein, dass ***Aronhold*** auf ganz natürliche Art durch eine Bemerkung *Hesses* (Bd. 36 dieses Journals S. 164, Zeilen 8—15 v. o.) zu seinem Fundamentaltheorem I. gelangt ist. Man vergl. auch die hier folgende Abhandlung des Herausgebers.

Briefentwurf von *Hesse* an *Aronhold*.

(Herausgegeben von Herrn *S. Gundelfinger* in Darmstadt.[1])

27. Dez. 49.

Mein lieber Herr *Aronhold*.

Ihr Brief vom 18. Dez. 49 ist so inhaltsschwer, dass ich ihn noch nicht ganz habe bewältigen können. Gleichwohl schreibe ich Ihnen wieder, weil Sie mir sagen, dass es Ihnen angenehm sei, von mir etwas zu hören, und sich mir gerade eine günstige Gelegenheit darbietet, mit einem berliner Freunde zu correspondiren.

Für Ihr Citat aus dem Cambridge Journal sage ich Ihnen meinen verbindlichsten Dank. Ich habe mir immer vorgestellt, dass das Gesuchte dort zu finden sein würde, und bin deshalb mehrmals auf der Bibliothek gewesen, allein die Hefte seit 1843 habe ich nicht bekommen können, weil sie nicht aufzufinden waren. Ihrer Ansicht, dass die Auflösung der Gleichung in Liniencoordinaten in ihre einfachsten Bestandtheile irgend einen Nutzen habe, trete ich entschieden bei. Es ist wohl möglich, dass die Determinantenform des Eliminationsresultats nicht die richtige sei. Für die Gleichungen der Curven 3. und 4. Ordnung in Liniencoordinaten glaube ich, ist sie die richtige, wenigstens habe ich sie aufgestellt, wie Sie von *Jacobi* erfahren können.

---

[1]) [Eine Abschrift des Briefentwurfs von *Hesse* (Diarium 1850/53 S. 7) ist (nach S. 72 Z. 2—1 v. u. dieses Bandes) an *Aronhold* wahrscheinlich abgegangen und dieser wird daher hier, auch in Hinblick auf sein hohes wissenschaftliches Interesse veröffentlicht. Einige von *Hesse* abgekürzt geschriebene Worte erhielten im Drucke die nöthige Ergänzung.] Gf.

Dem Beweise Ihrer Gleichung $R = T^2 - S^3$ bezeuge ich meine Hochachtung.

Ich übergehe vieles Interessante in Ihrem Briefe, um mich über eines weiter auszulassen, was Ihnen von Interesse sein dürfte. Sie stellen, wenn ich Sie nicht missverstanden habe, die Vermuthung auf[1]), dass, wenn u eine homogene Function des $n$ten Grades, v die Determinante derselben und w die Determinante der Determinante ist, sich w aus u und v werde zusammensetzen lassen, so dass

$$w = pu + qv.$$

Dem muss ich wiedersprechen. Nachdem ich die Richtigkeit dieser Gleichung für $n = 3$ bewiesen hatte, lag es auf der Hand, den Satz auszudehnen auf $n = 4$ etc. Da habe ich denn einen Beweis gemacht, dass zu den Functionen u und v noch eine dritte Function oder mehrere Functionen hinzukommen müssen, damit jene Gleichung richtig werde, oder besser mit anderen Worten, dass die Gleichung für $n > 3$ nicht richtig sein könne. (Es ist mir aber interessant zu erfahren, dass eine dritte Function ausreicht, um jene Gleichung richtig zu machen.) Der Beweis ist folgender:

Die Curve $v = 0$ schneidet die Curve $u = 0$ in den Wendepunkten der letzteren.

Die obige Gleichung $w = pu + qv$ sagt aber, dass $w = 0$ durch die sämmtlichen Schnittpunkte von u und v geht. Da aber $w = 0$ die Curve $v = 0$ in Wendepunkten der letzeren schneidet, so schneidet auch $u = 0$ die Curve $v = 0$ in den Wendepunkten der letzteren. Mit anderen Worten: Die Wendepunkte von $u = 0$ fallen mit den Wendepunkten von $v = 0$ zusammen, wenn obige Gleichung $w = pu + qv$ statt hat. Ich werde aber zeigen, dass die Wendepunkte von $u = 0$ nicht zugleich Wendepunkte von $v = 0$ sein können, woraus natürlich die Unstatthaftigkeit jener Combination $w = pu + qv$ folgt. Ich brauche nur an einem Wendepunkte der Curve $u = 0$ zu beweisen, dass er nicht zugleich ein Wendepunkt der Curve $v = 0$ ist. Ich werde die Curve durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems gehen lassen. Alsdann ist u von der Form:

$$u = \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \alpha_3 z^{n-3} + \quad ;$$

$\alpha_1 = 0$ ist die Gleichung der Tangente an $u = 0$ in dem Punkte p. Die Be-

[1]) [*Aronhold* hatte im Gegentheil diese Vermuthung *Cayleys* angezweifelt.]

dingung, dass p ein Wendepunkt sei, ist, dass α_1, welches vom ersten Grade ist, in α_2, welches vom zweiten Grade ist, als Factor stecke. Nehmen Sie daher an, dass die x-Axe des Coordinatensystems die Wendetangente sei, was der Bequemlichkeit wegen zu empfehlen ist, so ist $\alpha_1 = y$ und $\alpha_2 = y(px+qy)$. Die Determinante v ist, da die Curve $v = 0$ durch p hindurchgeht von der Form:

$$v = \beta_1 z^{3n-7} + \beta_2 z^{3n-8} + \cdots\cdots$$

und es lassen sich die beiden ersten hingeschriebenen Glieder für $v = 0$ leicht berechnen, da hierzu die drei hingeschriebenen Glieder für u ausreichen. Setzen Sie nun $\beta_1 = 0$ und den Werth x aus dieser Gleichung in β_2, so muss β_2 verschwinden, wenn p gemeinschaftlicher Wendepunkt der Curven $u = 0$ und $v = 0$ sein soll. Sie werden aber finden, dass allerdings auf diese Weise β_2 verschwindet, wenn $n = 3$ ist. Es verschwindet aber nicht, wenn $n > 3$. Daher gilt auch der Satz $w = pu + qv$ für $n = 3$, für $n > 3$ aber nicht. Wenn α_1 identisch $= 0$ ist, so ist auch β_1 identisch $= 0$, woraus folgt, dass wenn der Wendepunkt in $u = 0$ ein Doppelpunkt wird, auch für $v = 0$ in diesem Punkte ein Doppelpunkt liegt. Da aber in diesem Falle die Factoren in α_2 und β_2 dieselben werden, so folgt hieraus, dass die beiden Tangenten im Doppelpunkte der Curve $u = 0$ zugleich Tangenten der Curve $v = 0$ werden, und dass, wie *Plücker* bemerkt hat, sechs Wendepunkte in einen Doppelpunkt zusammenfallen.

Ich empfinde eine lebhafte Freude darüber, dass Sie mir durch offene Darlegung der Prinzipien Ihrer Arbeit einen besseren Einblick in dieselbe verschafft haben, als man aus den Resultaten, welche Sie veröffentlicht haben, entnehmen konnte. Sie haben hier eine Fundgrube eröffnet, die die reichste Ausbeute ergeben hat und noch zu geben verspricht. Glück auf den Weg. Ein anderes Mal mehr.

Ihr

Otto Hesse.

Ueber die muthmassliche Entstehung der Sätze *Aronhold*s über die Invariante S und eine damit zusammenhängende neue Begründung der Theorie der ternären kubischen Formen*).

(Von Herrn *S. Gundelfinger* in Darmstadt.)

Definitionen: $f(x_1, x_2, x_3) = f$ sei eine ternäre kubische Form,

$$f_i = \frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad f_{ik} = \frac{1}{6}\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_k} \qquad (i,k = 1,2,3),$$

$$\Delta = 6\,\Sigma \pm (f_{11}\, f_{22}\, f_{33}).$$

Ferner bezeichnen wir das Doppelte des Coefficienten von f_{ik} in $\frac{\Delta}{6}$ mit θ^{ik}, z. B. $\theta^{11} = 2\,(f_{22}f_{33} - f_{23}^2)$ etc. und setzen $\theta = \theta^{11}u_1^2 + 2\,\theta^{12}u_1u_2 + \cdots + \theta^{33}u_3^2$; wir haben dabei $\frac{1}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial u_i \partial u_k} = \theta^{ik}$ angenommen, wie wir überhaupt bei Formen, welche die x_i und u_i gleichzeitig enthalten, Differentationen nach u_i durch obere Indices und Differentationen nach x_i durch untere Indices andeuten, so dass also auch

$$\theta = \theta_{11}x_1^2 + 2\,\theta_{12}x_1x_2 + \cdots + \theta_{33}x_3^2.$$

Nach der Theorie der conjugirten Pole einer Curve dritter Ordnung

*) Die folgende Arbeit ist ein Auszug aus einer Vorlesung, die ich im Jahre 1882 über Invariantentheorie gehalten habe, und zwar auf Grundlage einer Nachschrift des jetzigen Gymnasiallehrers Herrn Prof. Dr. *Fischer* in Darmstadt. Man vergleiche auch die Anmerkung [4] auf S. 79 dieses Bandes.

besteht zwischen zwei conjugirten Polen x_i und y_i das System von Gleichungen (*Hesse,* ges. W. 1897 p. 147–178):

$$(1.) \qquad f_{i1}y_1 + f_{i2}y_2 + f_{i3}y_3 = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

woraus nach bekannten Sätzen folgt

$$(2.) \qquad \varrho\, y_i y_k = \theta^{ik} = \theta_{11}^{ik}x_1^2 + 2\,\theta_{12}^{ik}x_1x_2 + \cdots + \theta_{33}^{ik}x_3^2,$$

wobei für die x_i die kubische Gleichung $\Delta = 0$ besteht.

Da in (1.) die x_i mit y_i vertauscht werden können, so hat man gleichzeitig

$$(3.) \qquad \sigma\, x_l x_m = \theta^{lm} = \theta_{11}^{lm}y_1^2 + 2\,\theta_{12}^{lm}y_1y_2 + \cdots + \theta_{33}^{lm}y_3^2.$$

Multiplicirt man (3.) mit ϱ und ersetzt rechter Hand $\varrho\, y_i y_k$ durch die Werthe aus (2.), so entsteht

$$(4.) \qquad \varrho\,\sigma\, x_l x_m = \zeta_{11}^{lm}x_1^2 + 2\,\zeta_{12}^{lm}x_1x_2 + \cdots + \zeta_{33}^{lm}x_3^2 \qquad (l, m = 1, 2, 3),$$

wobei

$$(5.) \qquad \begin{cases} \zeta_{11}^{lm} = \theta_{11}^{lm}\theta_{11}^{11} + 2\,\theta_{12}^{lm}\theta_{11}^{12} + \cdots + \theta_{33}^{lm}\theta_{11}^{33} = \sum\limits_{i,k=1,2,3} \theta_{ik}^{lm}\theta_{11}^{ik}, \\ \zeta_{12}^{lm} = \theta_{11}^{lm}\theta_{12}^{11} + 2\,\theta_{12}^{lm}\theta_{12}^{12} + \cdots + \theta_{33}^{lm}\theta_{12}^{33} = \sum\limits_{i,k=1,2,3} \theta_{ik}^{lm}\theta_{12}^{ik}, \\ \zeta_{33}^{lm} = \theta_{11}^{lm}\theta_{33}^{11} + 2\,\theta_{12}^{lm}\theta_{33}^{12} + \cdots + \theta_{33}^{lm}\theta_{33}^{33} = \sum\limits_{i,k=1,2,3} \theta_{ik}^{lm}\theta_{33}^{ik}. \end{cases}$$

Da die auf Null gebrachte Gleichung (4.) sechs lineare und homogene Gleichungen in Bezug auf die sechs Grössen $x_1^2, x_1x_2, \ldots, x_3^2$ repräsentirt, so muss die Determinante verschwinden, die aus den 36 Coefficienten der sechs Producte $x_1^2, x_1x_2, \ldots, x_3^2$ gebildet ist; also ist $\varrho\,\sigma$ jedenfalls constant: etwa gleich S. Da jede dieser sechs quadratischen Gleichungen für alle Werthe x_i der kubischen Gleichung $\Delta = 0$ besteht, so ist jede derselben eine identische Gleichung nach einem bekannten Fundamentalsatz der Algebra. Beispielsweise hat für $f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6\,k\,x_1x_2x_3$ $\Delta = 0$ die Form

$$-6\,[k^2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + (1 + 2\,k^3)\,x_1x_2x_3] = 0.$$

Nun können stets x_1 und x_2 so fixirt werden, dass diese Gleichung drei *verschiedene* Wurzeln für x_3 hätte; also ist jede der obigen sechs Gleichungen identisch in x_3, und ebenso in x_1 und x_2. Somit hat man

$$(5a.) \qquad S = \zeta_{ll}^{ll} = 2\,\zeta_{lm}^{lm} \quad (l \gtrless m);$$

dagegen

$$(5b.) \qquad 0 = \zeta_{ik}^{lm},$$

sobald die Indices i, k von l, m verschieden sind. Uebrigens kann man sagen, dass

$$\theta^{11}\theta_{11} + 2\,\theta^{12}\theta_{12} + \cdots + \theta^{33}\theta_{33} = S u_x^2.$$

Aus den Gleichungen (5a), (5b) folgt zunächst durch Polarenbildung

$$\Delta_{ik} = \theta_{ik}^{11} f_{11} + 2\,\theta_{ik}^{12} f_{12} + \cdots + \theta_{ik}^{33} f_{33} \tag{6.}$$

und durch Multiplication der sechs Werthe von S mit f_{lm} unter Berücksichtigung von (6.)

$$S \cdot f_{lm} = \theta_{lm}^{11}\Delta_{11} + 2\,\theta_{lm}^{12}\Delta_{12} + \cdots + \theta_{lm}^{33}\Delta_{33}. \tag{6a.}$$

Man kann, beiläufig bemerkt, aus den 36 Coefficienten der Zwischenform θ die Determinante

$$|\,\theta_{ik}^{11}\theta_{ik}^{12}\ldots\theta_{ik}^{33}\,|$$

bilden, eine Determinante sechsten Grades, deren Quadrat offenbar den Werth $8S^6$ besitzt; denn multiplicirt man die Determinante mit sich selbst, so bekommt man nach dem Multiplicationstheorem eine Determinante, bei welcher alle Glieder gleich Null sind; ausgenommen die Diagonalglieder, von denen drei den Werth S, die anderen den Werth $2S$ haben.

Die Gleichungen (6.) *repräsentiren ein System von* $3.6 = 18$ *Gleichungen, wenn man die Coefficienten von* x_1, x_2, x_3 *mit einander vergleicht und* i, k *gleich* 1, 2, 3 *setzt; analog erhält man aus* (6a.) *wiederum* 18 *Gleichungen, das sind zusammen* 36 *Gleichungen zur Definition der* θ_{ik}^{lm}.

Setzt man unter Anwendung der *Aronhold*schen Bezeichnung (dieses Journal LV, § 27, S. 164ff.) für irgend einen Functionswerth φ der $a_{\varkappa\lambda\mu}$

$$\delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial a_{111}} b_{111} + 3\,\frac{\partial\varphi}{\partial a_{112}} b_{112} + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial a_{333}} b_{333}\,, \tag{7.}$$

so wird unter Einführung der Bezeichnungen

$$\tfrac{1}{2}\,\delta\theta + S u_x^2 = 2\eta, \qquad \delta S = 4\,T \tag{8.}$$

durch Anwendung des δ-Processes auf obige 36 Gleichungen das System erhalten

$$\begin{cases} S f_{ik} = \eta_{ik}^{11} f_{11} + 2\,\eta_{ik}^{12} f_{12} + \cdots + \eta_{ik}^{33} f_{33}, \\ T f_{ik} = \eta_{ik}^{11}\Delta_{11} + 2\,\eta_{ik}^{12}\Delta_{12} + \cdots + \eta_{ik}^{33}\Delta_{33}. \end{cases} \tag{9.}$$

Ersetzt man in den Formeln (6.) und (6a.) die Grundform f durch

deren *Hesse*sche Determinante Δ und nennt die hierdurch aus θ hervorgehende Zwischenform K, so entsteht mit Rücksicht auf

$$\Delta_\Delta = 3S^2 f - 2T\Delta, \qquad S_\Delta = 4T^2 - 3S^3$$

$$(10.) \quad \begin{cases} 3S^2 f_{ik} - 2T\Delta_{ik} = K_{ik}^{11}\Delta_{11} + 2K_{ik}^{12}\Delta_{12} + \cdots + K_{ik}^{33}\Delta_{33}, \\ 2T f_{ik} - S\Delta_{ik} = K_{ik}^{11} f_{11} + 2K_{ik}^{12} f_{12} + \cdots + K_{ik}^{33} f_{33}\ ^*). \end{cases}$$

Die Systeme (6.), resp. (6ª.), sowie (9.) und (10.) repräsentiren drei Systeme von je 36 Gleichungen, durch welche die 36 Coefficienten jeder der drei *Aronhold*schen Zwischenformen charakterisirt werden. Mit Zuhülfenahme der Differentialgleichungen für die Invarianten lässt sich hierauf ohne Anwendung von Symbolik die ganze Theorie der ternären kubischen Formen aufbauen, wie in einer kommenden Arbeit gezeigt werden soll.

---

*) Bei Ableitung der *zweiten* Gleichung des Systems (10.) ist die erste Gleichung in (10.) benützt und der Factor $3S^2$ ausgeschieden worden. *Uebrigens führt man besser* $K - Tu_x^2$ *an Stelle von* K *in* (10.) *ein.*

Zur Berechnung der *Gauss*schen Logarithmen für kleine Werthe von *B* resp. zugehörige Werthe von *A*.

(Von Herrn *S. Gundelfinger* in Darmstadt.)

Bei vielen Untersuchungen ist es nöthig, für zwei durch die Gleichung

$$10^B = 1 + 10^A \quad \text{oder} \quad 10^{B-A} = 10^{-A} + 1$$

verknüpfte Grössen A und B Tafeln zu besitzen, um bei gegebenen A ($|A| > 3$) das zugehörige B und umgekehrt auf mehr als sechs Stellen zu berechnen.

A. Berechnung von B bei gegebenem $A < 7{,}0-10$.

Hierzu dient die *Grundformel*

$$B = M\left(10^A - \frac{10^{2A}}{2} + \frac{10^{3A}}{3} \cdots\right)$$

$$= \text{num log}\,(A + \log M) - k;\quad k = M\left(\frac{10^{2A}}{2} - \frac{10^{3A}}{3} \cdots\right)$$

wobei

$$M = \log e = 0{,}4342944481903; \qquad \log M = 9{,}6377843113\,01.$$

Für *siebenstellige* Berechnung von B bei gegebenem $A < 7{,}0-10$ ist die Correction $k = M\frac{10^{2A}}{2}$ in Einheiten der *achten* Decimale ausgedrückt durch folgende Tabelle bestimmt:

Grenzen von $10 + A$	abzuziehende k
6,681	5
6,832	10
6,920	15
6,982	20
7,031	25

Man erhält auf diese Art B auf sieben Stellen genau, eventuell mit Strich, selbst wenn man bei Aufsuchung des Numerus in der Grundformel log M und A nur fünfstellig resp. vierstellig ansetzt.

II. Für die *achtstellige* Berechnung von B bei gegebenem

$$A < 7{,}0 - 10$$

dient *dieselbe Grundformel;* k bedeutet die Correction in Einheiten der *neunten* Decimale.

Grenzen von $10+A$	k	Grenzen von $10+A$	k	Grenzen von $10+A$	k	Grenzen von $10+A$	k	Grenzen von $10+A$	k
6,181	5	6,702	55	6,842	105	6,927	155	6,987	205
6,331	10	6,721	60	6,852	110	6,934	160	6,993	210
6,420	15	6,738	65	6,862	115	6,940	165	6,998	215
6,482	20	6,754	70	6,871	120	6,946	170	7,003	220
6,531	25	6,769	75	6,880	125	6,953	175	7,007	225
6,570	30	6,783	80	6,889	130	6,959	180	7,012	230
6,604	35	6,796	85	6,897	135	6,965	185	7,017	235
6,633	40	6,809	90	6,905	140	6,971	190	7,022	240
6,658	45	6,820	95	6,912	145	6,977	195	7,026	245
6,681	50	6,832	100	6,920	150	6.982	200	7,031	250

III. Für die *neunstellige* Berechnung von B bei gegebenem

$$A < 7{,}0 - 10$$

dient die folgende Tabelle.

$$B = \text{num log } (A + \log M) - k;$$

k in Einheiten der *neunten* Decimale; log $M = 9{,}6377843$.

Grenzwerth von $10+A$	k	Grenzwerth von $10+A$	k	Grenzwerth von $10+A$	k	Grenzwerth von $10+A$	k
5,681	0,5	6,309	9	6,459	18	6,547	27
5,832	1	6,332	10	6,471	19	6,555	28
5,982	2	6,352	11	6,482	20	6,563	29
6,070	3	6,371	12	6,493	21	6,570	30
6,133	4	6,389	13	6,503	22	6,577	31
6,181	5	6,405	14	6,512	23	6,584	32
6,221	6	6,420	15	6,522	24	6,591	33
6,254	7	6,434	16	6,531	25	6,597	34
6,283	8	6,447	17	6,539	26	6,604	35

Grenzwerth von $10+A$	k	Grenzwerth von $10+A$	k	Grenzwerth von $10+A$	k	Grenzwerth von $10+A$	k
6,610	36	6,789	82	6,8852	128	6,9519	174
6,616	37	6,791	83	6,8869	129	6,9531	175
6,622	38	6,794	84	6,8886	130	6,9544	176
6,627	39	6,796	85	6,8903	131	6,9556	177
6,633	40	6,799	86	6,8919	132	6,9568	178
6,638	41	6,801	87	6,8935	133	6,9580	179
6,643	42	6,804	88	6,8952	134	6,9593	180
6,648	43	6,806	89	6,8968	135	6,9605	181
6,653	44	6,809	90	6,8984	136	6,9617	182
6,658	45	6,811	91	6,9000	137	6,9628	183
6,663	46	6,814	92	6,9016	138	6,9640	184
6,668	47	6,816	93	6,9031	139	6,9652	185
6,672	48	6,818	94	6,9047	140	6,9664	186
6,677	49	6,820	95	6,9062	141	6,9675	187
6,681	50	6,823	96	6,9078	142	6,9687	188
6,685	51	6,825	97	6,9093	143	6,9699	189
6,690	52	6,827	98	6,9108	144	6,9710	190
6,694	53	6,829	99	6,9123	145	6,9721	191
6,698	54	6,832	100	6,9138	146	6,9733	192
6,702	55	6,8338	101	6,9153	147	6,9744	193
6,706	56	6,8359	102	6,9168	148	6,9755	194
6,710	57	6,8380	103	6,9182	149	6,9766	195
6,713	58	6,8401	104	6,9197	150	6,9778	196
6,717	59	6,8422	105	6,9211	151	6,9789	197
6,721	60	6,8443	106	6,9225	152	6,9800	198
6,724	61	6,8463	107	6,9240	153	6,9810	199
6,728	62	6,8483	108	6,9254	154	6,9821	200
6,731	63	6,8503	109	6,9268	155	6,9832	201
6,735	64	6,8523	110	6,9282	156	6,9843	202
6,738	65	6,8543	111	6,9296	157	6,9854	203
6,741	66	6,8562	112	6,9310	158	6,9864	204
6,745	67	6,8582	113	6,9323	159	6,9875	205
6,748	68	6,8601	114	6,9337	160	6,9886	206
6,751	69	6,8620	115	6,9350	161	6,9896	207
6,754	70	6,8639	116	6,9364	162	6,9907	208
6,757	71	6,8657	117	6,9377	163	6,9917	209
6,760	72	6,8676	118	6,9390	164	6,9927	210
6,763	73	6,8694	119	6,9404	165	6,9938	211
6,766	74	6,8712	120	6,9417	166	6,9948	212
6,769	75	6,8730	121	6,9430	167	6,9958	213
6,772	76	6,8748	122	6,9443	168	6,9968	214
6,775	77	6,8766	123	6,9456	169	6,9978	215
6,778	78	6,8783	124	6,9468	170	6,9988	216
6,780	79	6,8801	125	6,9481	171	6,9999	217
6,783	80	6,8818	126	6,9494	172	7,0009	218
6,786	81	6,8835	127	6,9506	173		

IV. Für die ***zehnstellige*** Berechnung von B bei gegebenem

$$A < 6{,}0305928465 - 10^{*})$$

dient folgende Tabelle; k in Einheiten der ***elften*** Decimale.

Grenzen von $10+A$	k	Grenzen von $10+A$	k	Grenzen von $10+A$	k	Grenzen von $10+A$	k	Grenzen von $10+A$	k
5,181	5	5,702	55	5,842	105	5,927	155	5,987	205
5,332	10	5,721	60	5,852	110	5,934	160	5,993	210
5,420	15	5,738	65	5,862	115	5,940	165	5,998	215
5,482	20	5,754	70	5,871	120	5,946	170	6,003	220
5,531	25	5,769	75	5,880	125	5,953	175	6,007	225
5,570	30	5,783	80	5,889	130	5,959	180	6,012	230
5,604	35	5,796	85	5,897	135	5,965	185	6,017	235
5,633	40	5,809	90	5,905	140	5,971	190	6,022	240
5,658	45	5,820	95	5,912	145	5,977	195	6,026	245
5,681	50	5,832	100	5,920	150	5,982	200	6,031	250

Das hier gegebene Verfahren unterscheidet sich von dem durch Herrn Dr. *Nell* in der Zeitschrift für Vermessungswesen (XX. Bd. 1891, S. 442 ff.) mitgetheilten durch Vermeidung jeder Interpolation.

V. Zur Berechnung von B bei gegebenen positiven Werthen von A $(A > 3)$ dient die Formel

$$B - A = \text{num log}\,(\log M - A) - k; \qquad k = M\left(\frac{10^{-2A}}{2} - \frac{10^{-3A}}{3}\cdots\right);$$

wobei k aus den Tafeln 1–4 (für die dekadische Ergänzung des gegebenen positiven A) zu nehmen ist.

B. Berechnung von A bei gegebenem B.

I. Für kleine Werthe von B dient die Formel

$$A = \log\frac{1}{M} + \log B + \frac{B}{2} + k,$$

wobei

$$k = \frac{B^2}{24\,M} - \frac{B^4}{2880\,M^3}\cdots\cdots; \qquad B > 2\pi M.^{**})$$

Das (logarithmisch zu berechnende) Glied $\frac{B^2}{24\,M}$ beträgt nach dieser Formel z. B. nur fünf Einheiten der elften Decimale für $B = 0{,}00002283$, so dass k nur für sehr grosse Genauigkeit in Betracht kommt.

---

*) Zur Berechnung der gemeinen zehnstelligen Logarithmen genügt es bei Benutzung des „Thesaurus von Vega“ $|A| > 4$ anzunehmen.

**) Vergl. meine, S. 91 Anm. citirte Schrift.

Anmerkung: Will man A sechs- oder acht- oder zehn- .... stellig berechnen, so kann man die Seite 10 in meinem Werke: Sechsstellige *Gauss*sche Logarithmen. 1900. *Veit u. Co.* benutzen. Das dortige k ist genau $\frac{B^2}{24\,M}$; für acht- oder zehn- .... stellige Berechnung hätte man das dort gegebene B durch 10, 100 .... zu dividiren.

II. Will man für gegebene Werthe von B $(B > 3)$ die zugehörigen Werthe von A berechnen, so dient dazu die Formel

$$A = B - \operatorname{num}\log(\log M - B) - k,$$

wobei k wiederum aus den obigen Tabellen 1–4 zu entnehmen ist, nur ist dabei für A die dekadische Ergänzung von B zu setzen.

Anwendung.

Unter der grossen Zahl von Anwendungen, welche die oben gegebenen Tabellen gestatten, soll hier als einziges Beispiel die neunstellige Berechnung eines Logarithmus gegeben werden nach einer Methode, die in dem Werke: *Gundelfinger u. Nell* „Tafeln zur Berechnung neunstelliger Logarithmen“ *) entwickelt ist.

Aufgabe: $\overset{10}{\log}\frac{1}{2}\varpi$ zu berechnen, worin $\frac{1}{2}\varpi$ den Quadranten der Lemniskate bedeutet (vgl. *Gauss*' Werke, Bd. III, S. 413–414).

$$\tfrac{1}{2}\varpi = 1{,}311028771460599068.$$

Um die Mantisse des Logarithmus von $\frac{1}{2}\varpi$ zehnstellig zu finden, berechne man diejenige von $N = 13\,110{,}287771 = 13\,110 + 0{,}287771 = n + p$. [Allgemein setze man $N = n + p$, worin n, die vier höchsten effectiven Ziffern, als ganze Zahl und p als Decimalbruch zu betrachten ist:

$$\log N = \log n + \log\left(1 + \frac{p}{n}\right) = \log n + B;\ A = \log p - \log n].$$

---

*) Betreffs des gemeinsam mit Herrn *Nell* veröffentlichten Werkes will ich ausdrücklich bemerken, dass alle daselbst gegebenen mühsamen und verdienstvollen Rechnungen sammt Revisionen ausschliesslich Eigenthum des Herrn *Nell* sind. Von mir selbst rührt nur der Gedanke her, die *Gauss*schen Logarithmen innerhalb eines kleinen Intervalles für die Berechnung der gemeinen Logarithmen verwendbar zu machen und in der Reihe für A die Glieder $\log\frac{1}{M} + \frac{B}{2}$ von dem bekannten *Nell*schen P in der Gleichung $A = \log B + P$ abzutrennen.

$\frac{1}{2}\varpi = 1{,}3110287771$

$N = 13110{,}287771$ $\quad n = 13110$: $p = 0{,}287771$

$\log p = 0{,}4590470-1$ $\quad 0{,}00000953298$

$\log n = 4{,}1176027$ $\quad 10$ (Tab. IV)

$A = 5{,}3414443-10$ $\quad B = 0{,}00000953288$

$\log M = 9{,}6377843-10$ $\quad \log n = 4{,}1176026917$

$A + \log M = 0{,}9792286-6$ $\quad \log N = 4{,}1176122246$

$\log \frac{1}{2}\varpi = 0{,}1176122246$

Nach *Gauss* (Werke Bd. III, S. 413–414) wäre

$$\frac{1}{2}\varpi = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \quad \log \tfrac{1}{2}\varpi = 0{,}11761222269$$

Die neunte Decimale **2** muss nach meiner Rechnung **4** heissen, indem durch drei verschieden angelegte Rechnungen der richtige Werth von

$$\log \text{brigg} \tfrac{1}{2}\varpi = 0{,}1176\ 1222\ 4579\ 9199$$

gefunden wurde.

Da der Werth von *Gauss* für $\log \text{hyp} \frac{1}{2}\varpi$ von mir auf mindestens 20 Stellen richtig, dagegen der Werth von $\log \text{brigg} \frac{1}{2}\varpi$ von der neunten Stelle ab als durchaus falsch gefunden worden ist, so dürfte *Gauss* bei einer Nebenrechnung wohl einen falschen Werth aus einer gedruckten Tafel entnommen haben.

Eine Anwendung der Quaternionentheorie auf die thermodynamischen Gleichungen.

(Von Herrn *Victor Fischer* in Stuttgart).

Bei der Bedeutung, welche die Quaternionentheorie und besonders die Geometrie der Felder in der Physik bereits besitzt, dürfte es vielleicht nicht ganz zwecklos erscheinen, sich ihrer Sprache bei der Darstellung der thermodynamischen Beziehungen eines vollkommenen Gases zu bedienen.

Zu diesem Zwecke wollen wir vorerst kurz die räumlichen Differentialoperationen eines beliebigen Vectorfeldes anschreiben, das uns entweder durch $\mathfrak{v} = f(\mathfrak{r})$ oder durch $v_x = f_x(xyz)$, $v_y = f_y(xyz)$, $v_z = f_z(xyz)$ gegeben sein kann, wobei $\mathfrak{r}$ den Radiusvektor in Bezug auf einen beliebig gewählten Anfangspunkt und xyz die Coordinaten in Richtung der drei zu einander senkrechten Einheitsvectoren $\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}$ vorstellen*). Es ist daher auch

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{i}v_x + \mathfrak{j}v_y + \mathfrak{k}v_z.$$

Die räumliche Differentiation dieser Vectorfunction ergiebt:

$$\nabla\mathfrak{v} = -\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + \left\{\mathfrak{i}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \mathfrak{j}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \mathfrak{k}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\right\}$$

Es stellt uns daher $\nabla\mathfrak{v}$, da es aus einem Scalar- und einem Vectortheil besteht, eine Quaternion vor. Führen wir für diese beiden Theile die übliche Bezeichnung ein:

$$\text{div}\ \mathfrak{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = q$$

$$\text{curl}\ \mathfrak{v} = \mathfrak{i}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \mathfrak{j}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \mathfrak{k}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = \mathfrak{w},$$

*) Bezüglich der Bezeichnungsweise sei noch erwähnt, dass gerichtete Grössen mit deutschen, richtungslose Grössen mit lateinischen Buchstaben geschrieben werden.

so können wir für $\nabla\mathfrak{v}$ einfacher schreiben.

$$\nabla\mathfrak{v} = -\operatorname{div}\mathfrak{v} + \operatorname{curl}\mathfrak{v} = -q + \mathfrak{w}.$$

Durch die räumliche Differentialoperation an $\mathfrak{v}$ ergiebt sich daher ein Scalar- und ein Vectorfeld, das wir nach *Föppl* auch als Quellen- und Wirbelfeld bezeichnen können, wenn wir uns das Vectorfeld unter dem Bilde einer Flüssigkeitsbewegung vorstellen*).

Wir bezeichnen nun für ein vollkommenes Gas die Wärme mit Q, die äussere Arbeit mit L, die absolute Temperatur mit T, den specifischen Druck mit p, die specifische Entropie (d. i. die Entropie pro Masseneinheit) mit η, das specifische Volumen mit v, die specifische Wärme bei constantem Druck mit c_p, diejenige bei constantem Volumen mit c_v, das Verhältniss $\frac{c_p}{c_v}$ mit $\varkappa$ und wählen die Wärmeeinheit so, dass sie gleich der Arbeitseinheit ist.

Da es sich uns hier um ein ebenes Problem handelt, so vereinfachen sich die obigen allgemeinen Ausdrücke in der folgenden Weise, wobei wir setzen

$$x = v, \quad y = p, \quad z = 0$$

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{g}, \quad v_x = g_v, \quad v_y = g_p, \quad v_z = 0$$

(1.) $$\mathfrak{g} = g_v\mathfrak{i} + g_p\mathfrak{j}$$

(2.) $$\operatorname{div}\mathfrak{g} = \frac{\partial g_v}{\partial v} + \frac{\partial g_p}{\partial p}$$

(3.) $$\operatorname{curl}\mathfrak{g} = \left(\frac{\partial g_p}{\partial v} - \frac{\partial g_v}{\partial p}\right)\mathfrak{k}.$$

In diese für das ebene Problem allgemein gültigen Gleichungen führen wir nun die Beziehungen der Thermodynamik eines vollkommenen Gases ein.

Für dieses hat das Wärmedifferential die folgende bekannte Form:

$$dQ = \frac{\varkappa p}{\varkappa - 1}\,dv + \frac{v}{\varkappa - 1}\,dp.$$

Wir definiren nun den Vector $\mathfrak{g}$ durch die Gleichung

(1ª.) $$\mathfrak{g} = \frac{\varkappa p}{\varkappa - 1}\,\mathfrak{i} + \frac{v}{\varkappa - 1}\,\mathfrak{j},$$

und werden im weiteren Verlaufe unserer Entwicklungen sehen, dass dieser für jeden Punkt unserer Darstellungsebene nach Grösse und Richtung eindeutig bestimmte Vector $\mathfrak{g}$ die Bedeutung eines Differentialquotienten für Q besitzt.

---

*) Die Geometrie der Wirbelfelder von Dr. *A. Föppl*, Leipzig 1897.

Aus (1ª) folgt nun weiter

$$g_v = \frac{\varkappa p}{\varkappa - 1}, \qquad g_p = \frac{v}{\varkappa - 1},$$

(2ª.) $$\operatorname{div} \mathfrak{g} = 0,$$

(3ª.) $$\operatorname{curl} \mathfrak{g} = \left(\frac{1}{\varkappa - 1} - \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\right)\mathfrak{k} = -\mathfrak{k}.$$

Wollen wir uns diese Beziehungen durch das Bild einer in unserer Darstellungsebene strömenden Flüssigkeit nach dem Vorgange von *Föppl* veranschaulichen, so dass der Vector $\mathfrak{g}$ in jedem Punkte der Ebene die Geschwindigkeit nach Grösse und Richtung angiebt, so ist infolge $\operatorname{div} \mathfrak{g} = 0$ die Continuitätsbedingung für diese Flüssigkeit erfüllt, während uns $\operatorname{curl} \mathfrak{g} = -\mathfrak{k}$ ein neues Vectorfeld vorstellt, in dem eine Flüssigkeit mit der constanten Geschwindigkeit 1 senkrecht zur Darstellungsebene strömt.

Wir wollen nun hier zwei bekannte Sätze der Feldertheorie verwenden. Der erste ist der Satz von *Stokes*. Derselbe lautet allgemein:

$$-\int_A^A S\mathfrak{v}\,d\mathfrak{s} = \int S \operatorname{curl} \mathfrak{v}\,\mathfrak{N}.\, df,$$

wobei $\mathfrak{N}$ eine Einheitsnormale zur Fläche bedeutet, df ein Element der betrachteten Fläche und $d\mathfrak{s}$ ein Element der diese einschliessenden Curve ist. Da der Scalar eines Productes zweier Vectoren an und für sich negativ ist, mussten wir, um das Linienintegral $\int g \cos\alpha\, ds$ auszudrücken, noch ein Minuszeichen einführen.

Ziehen wir demnach in unserer $(p\,v)$ Ebene eine beliebige geschlossene Curve und zerlegen dieselbe in Streifen, derart, dass $df = dp\,dv$ wird, so erhalten wir unter Einführung der speciellen Bezeichnungen für diesen Fall

$$-\int_A^A S\mathfrak{g}\,d\mathfrak{s} = \iint (S - \mathfrak{k}\mathfrak{N})\,dp\,dv.$$

Da nun $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{N}$ entgegengesetzt gerichtete Einheitsvectoren sind, so ist $-\mathfrak{k}\mathfrak{N} = 1$. Daher ist

$$-\int_A^A S\mathfrak{g}\,d\mathfrak{s} = \iint dp\,dv = \int (p_1 - p_2)\,dv.$$

Es stellt uns also das Integral der eingeschlossenen Fläche die bei diesem Kreisprocess geleistete Arbeit dar, was der üblichen Darstellungsweise entspricht. Es bleibt uns noch übrig zu zeigen, dass auch das Linien-

integral des Vectors $\mathfrak{g}$ längs der geschlossenen Curve in der That die dieser Arbeit entsprechende Wärme vorstellt. Zu diesem Zwecke bilden wir das Product von $\mathfrak{g}$ und $d\mathfrak{s}$, indem wir diese beiden Vectoren in ihre Componenten zerlegen.

Wir schreiben also

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}\,d\mathfrak{s} &= (g_v \mathfrak{i} + g_p \mathfrak{j})\ (dv\,\mathfrak{i} + dp\,\mathfrak{j}) \\ &= -(g_v\,dv + g_p\,dp) + \mathfrak{k}(g_v\,dp - g_p\,dv).\end{aligned}$$

Setzen wir für g_v und g_p ihre Werthe ein, so ergiebt sich

$$-S\mathfrak{g}\,d\mathfrak{s} = \left(\frac{\varkappa p}{\varkappa - 1}\,dv + \frac{v}{\varkappa - 1}\,dp\right) = dQ,$$

$$V\mathfrak{g}\,d\mathfrak{s} = \mathfrak{k}\left(\frac{\varkappa p}{\varkappa - 1}\,dp - \frac{v}{\varkappa - 1}\,dv\right).$$

Daraus ersehen wir, dass uns das Linienintegral thatsächlich die der beim Kreisprocess geleisteten Arbeit entsprechende Wärme darstellt, so dass wir schliesslich zu dem bekannten Ergebnis des Kreisprocesses kommen

$$Q = \int (p_1 - p_2)\,dv.$$

Es wird überhaupt ganz allgemein für jede beliebige Curve der Werth ihres Linienintegrals die längs derselben zugeführte, beziehungsweise entzogene Wärme vorstellen; mithin

$$(4.) \qquad -\int_A^B S\mathfrak{g}\,d\mathfrak{s} = \int_A^B g\cos\alpha\,ds = Q.$$

Diese Darstellung dürfte sich auch mit Vortheil zur Untersuchung gegebener Curven, beispielsweise des Diagramms einer Gasmaschine verwenden lassen, da sie den Verlauf der Wärmezufuhr während der vorliegenden Zustandsänderung an deren Curve selbst unmittelbar ersehen lässt. Selbstverständlich würden dabei dieselben Unvollkommenheiten gelten, wie sie für das Wärmediagramm infolge des nichtumkehrbaren Verlaufes sowie der unvollständigen Kenntnis des thermochemischen Vorganges bestehen.

Ein zweiter Satz der Feldertheorie ist der *Gauss*sche. Er lautet allgemein:

$$-\int S\mathfrak{v}\,\mathfrak{N}\cdot df = \int \operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau.$$

Für den Fall des ebenen Problems vereinfacht er sich zu der Aussage, dass die längs irgend einer geschlossenen Curve mehr aus- als ein-

strömende Flüssigkeit gleich der Ergiebigkeit des Quellenfeldes ist. Da in unserem Falle div $\mathfrak{v} = 0$ ist, so muss durch jede beliebige geschlossene Curve ebensoviel aus- als einströmen. Es ist daher

$$(5.) \qquad -\int_A^A S\mathfrak{g}\mathfrak{N}\cdot ds = 0,$$

wobei ds wieder ein Element der Curve darstellt, dessen Richtung aber jetzt durch die Einheitsnormale $\mathfrak{N}$ zur Curve festgelegt ist. Um zu beweisen, dass dieses Integral wirklich gleich 0 ist, stellen wir folgende Ueberlegung an: (siehe Fig. 1).

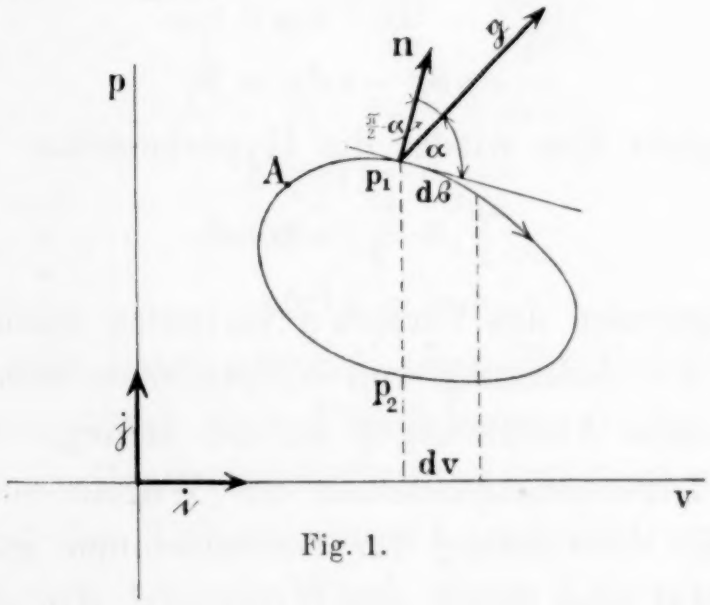


Fig. 1.

Es ist

$$T\cdot V\mathfrak{g}\,d\mathfrak{s} = g\sin\alpha\,ds = g_v dp - g_p dv,$$

$$S\mathfrak{g}\mathfrak{N} = -g\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = -g\sin\alpha,$$

daher ist

$$-S\mathfrak{g}\mathfrak{N}\cdot ds = g\sin\alpha\,ds = g_v dp - g_p dv;$$

dies in das Integral eingeführt, ergiebt

$$-\int_A^A S\mathfrak{g}\mathfrak{N}\cdot ds = \int_A^A (g_v dp - g_p dv) = \frac{\varkappa}{\varkappa-1}\int_A^A p\,dp - \frac{1}{\varkappa-1}\int_A^A v\,dv = 0.$$

Nun wollen wir die Strömungslinien, das sind jene Linien, längs welchen die Vectoren $\mathfrak{g}$ Tangenten sind, näher betrachten. Für diese Linien muss, da hier $\alpha = 0$ ist, auch $TV\mathfrak{g}\,d\mathfrak{s} = 0$ sein. Das ergiebt für die Differentialgleichung der gesuchten Curve

$$\frac{\varkappa}{\varkappa-1}p\,dp - \frac{1}{\varkappa-1}v\,dv = 0,$$

woraus durch Integration folgt

$$(6.) \qquad \frac{\varkappa p^2}{2} - \frac{v^2}{2} = \text{const.}$$

Die Strömungslinien sind uns mithin durch eine Hyperbelschar gegeben.

Diese Linien sind aber die orthogonalen Trajectorien der Adiabaten $pv^{\varkappa} = \text{const}$, also jener Linien, längs welchen die Wärmeänderung gleich 0 ist.

Es gilt nämlich für die Tangenten an die Adiabaten

$$\frac{dp}{dv} = -\varkappa \frac{p}{v},$$

folglich gilt für die Tangenten an ihre orthogonalen Trajectorien

$$\frac{dp}{dv} = \frac{1}{\varkappa}\frac{v}{p},$$

$$\varkappa p\,dp - v\,dv = 0.$$

Integrirt ergiebt dies wieder die Hyperbelschar

$$\frac{\varkappa p^2}{2} - \frac{v^2}{2} = \text{const}.$$

Die Richtungslinien des Vectors $\mathfrak{g}$ verlaufen mithin senkrecht zu den Adiabaten, welche die Bedeutung von Niveaulinien haben*).

Aus den ganzen Ausführungen ist die anfangs erwähnte Bedeutung des Vectors $\mathfrak{g}$ als Differentialquotienten der Wärme nun klar zu ersehen.

Was nun die Verwendung für Gasmaschinen anbelangt, so könnte man ein für alle Mal eine Schar von Hyperbeln, wie sie durch Gleichung (6.) gegeben ist, zeichnen und diese vervielfältigen. Das Indicatordiagramm liesse sich dann bei übereinstimmendem Maassstab auf derartigen mit den Strömungslinien versehenen Blättern direct abnehmen, und es würde sich aus den Neigungsverhältnissen des Diagramms zu den Strömungslinien unter den bereits angeführten Vernachlässigungen unmittelbar ein Bild für den Verlauf der Wärmezu- und Abfuhr ergeben.

Was schliesslich noch den scalaren Werth des Vectors $\mathfrak{g}$ in jedem Punkte des Feldes betrifft, so erhalten wir für diesen aus (1ª.)

$$g^2 = \frac{\varkappa^2 p^2}{(\varkappa-1)^2} + \frac{v^2}{(\varkappa-1)^2},$$

$$(7.) \qquad g = \frac{1}{\varkappa-1}\sqrt{\varkappa^2 p^2 + v^2}.$$

Ebenso wie wir das Wärmedifferential durch Druck und Volumen

*) Dass dies so sein muss, ist schon daraus zu ersehen, dass für eine Adiabate $dQ = -S\mathfrak{g}\,d\mathfrak{s} = 0$ gilt, was nur dann zutrifft, wenn $\mathfrak{g}$ senkrecht auf $d\mathfrak{s}$ steht.

dargestellt haben, können wir das Arbeitsdifferential durch Temperatur und Entropie darstellen. Dasselbe lautet

$$dL = T d\eta - c_v dT.$$

Es ergeben sich nun, wenn wir den Differentialquotienten von L mit $\mathfrak{h}$ bezeichnen, folgende Beziehungen:

(8.) $$\mathfrak{h} = h_\eta \mathfrak{i} + h_T \mathfrak{j},$$

(9.) $$\operatorname{div} \mathfrak{h} = \frac{\partial h_\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial h_T}{\partial T},$$

(10.) $$\operatorname{curl} \mathfrak{h} = \mathfrak{k} \left(\frac{\partial h_T}{\partial \eta} - \frac{\partial h_\eta}{\partial T} \right),$$

$$h_\eta = T, \quad h_T = -c_v,$$

(8^a.) $$\mathfrak{h} = T\mathfrak{i} - c_v \mathfrak{j},$$

(9^a.) $$\operatorname{div} \mathfrak{h} = 0,$$

(10^a.) $$\operatorname{curl} \mathfrak{h} = -\mathfrak{k}.$$

Wir sehen also, dass wir uns auch die Verhältnisse im Entropie-Temperaturdiagramm durch eine Flüssigkeitsströmung dargestellt denken können, für welche die Continuitätsbedingung erfüllt ist, und deren Wirbelfeld ein homogenes Feld des Einheitsvectors $\mathfrak{k}$ senkrecht zum Felde von $\mathfrak{h}$ ist. Es giebt uns also auch hier die durch einen Kreisprocess abgeschlossene Fläche gleichzeitig den Betrag der zugeführten Wärme an; denn nach dem *Stokes*schen Satze ist wieder

$$-\int_A^A S\mathfrak{h}\, d\mathfrak{s} = \int S \operatorname{curl} \mathfrak{h}\mathfrak{N} \cdot df,$$

$$-\int_A^A S\mathfrak{h}\, d\mathfrak{s} = -\mathfrak{k}\mathfrak{N} \int df = \int (T_1 - T_2)\, d\eta.$$

Das Linienintegral stellt uns wieder die dieser Wärme entsprechende Arbeit vor. Dies lässt sich auf dieselbe Weise zeigen wie früher. Es ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}\, d\mathfrak{s} &= (T\mathfrak{i} - c_v \mathfrak{j})\,(d\eta \mathfrak{i} + dT \mathfrak{j}) \\ &= -(T d\eta - c_v dT) + \mathfrak{k}(T dT + c_v d\eta), \\ -S\mathfrak{h}\, d\mathfrak{s} &= T d\eta - c_v dT = dL, \\ V\mathfrak{h}\, d\mathfrak{s} &= \mathfrak{k}(T dT + c_v d\eta). \end{aligned}$$

Wir kommen daher wieder auf das bekannte Resultat für den Kreisprocess

$$L = \int (T_1 - T_2)\, d\eta.$$

Auch hier können wir allgemein sagen, dass die auf einem beliebigen Wege AB geleistete oder aufgewendete Arbeit gleich ist dem Werthe des Linienintegrals

$$(11.) \qquad -\int_A^B S\mathfrak{h}\,d\mathfrak{s} = \int_A^B h\cos\alpha\,d\mathfrak{s} = L.$$

Bezüglich des *Gauss*schen Satzes muss, da das Quellenfeld gleich 0 ist, wieder die Beziehung bestehen

$$(12.) \qquad -\int_A^A S\mathfrak{h}\mathfrak{N}\cdot ds = 0,$$

was wir auf dieselbe Weise wie früher beweisen können. Es ist

$$T\cdot V\mathfrak{h}\,d\mathfrak{s} = h\sin\alpha\,ds = TdT + c_v d\eta,$$

$$S\mathfrak{h}\mathfrak{N} = -h\cos\frac{\pi}{2}-\alpha) = -h\sin\alpha,$$

$$-S\mathfrak{h}\mathfrak{N}\cdot ds = h\sin\alpha ds = TdT + c_v d\eta.$$

Führen wir das erhaltene Ergebniss in das obige Integral (12.) ein, so finden wir

$$-\int_A^A S\mathfrak{h}\mathfrak{N}\cdot ds = \int_A^A TdT + c_v\int_A^A d\eta = 0.$$

Die Linien, für welche $dL = 0$ ist, die also einer Zustandsänderung bei constantem Volumen entsprechen, ergeben sich aus

$$Td\eta - c_v dT = 0,$$

$$d\eta = c_v\frac{dT}{T},$$

$$\eta = c_v lg\,T + \text{const.}$$

Es sind dies logarithmische Linien, und da für sie $dL = -S\mathfrak{h}d\mathfrak{s} = 0$ gilt, so müssen die Strömungslinien, also jene Linien, an welche die Vectoren $\mathfrak{h}$ Tangenten sind, senkrecht zu diesen Curven verlaufen. Wir finden sie daher ebenso wie früher auf zweifache Art.

Erstens muss sein

$$T\cdot V\mathfrak{h}\,d\mathfrak{s} = TdT + c_v d\eta = 0,$$

$$(13.) \qquad \frac{T^2}{2} + c_v\eta = \text{const.}$$

Zweitens besteht für die Tangenten an die logarithmischen Linien die Beziehung

$$\frac{dT}{d\eta} = \frac{T}{c_v},$$

daher gilt für die Tangenten an ihre orthogonalen Trajectorien

$$\frac{dT}{d\eta} = -\frac{c_v}{T}.$$

Daraus erhält man durch Integration dieselbe Curvenschar

$$\frac{T^2}{2} + c_v\eta = \text{const.} \tag{13.}$$

Die Strömungslinien sind uns demnach durch eine Schar von Parabeln gegeben.

Für den Scalar von $\mathfrak{h}$ folgt aus (7a.)

$$h^2 = T^2 + c_v^2,$$

$$h = \sqrt{T^2 + c_v^2}. \tag{14.}$$

Zum Schlusse sei noch bemerkt, dass wir auch das Wärmedifferential durch Temperatur und Volumen und das Arbeitsdifferential durch Druck und Entropie ausdrücken könnten. Die Darstellung wird aber dann weniger einfach. Im ersten Falle ist das Wirbelfeld variabel, im zweiten Falle ist es zwar homogen, aber kein Einheitsfeld mehr. In beiden Fällen ist also die Darstellungsebene kein directes Maass der Wärme, beziehungsweise Arbeit. Ausserdem ist im ersten Falle div von 0 verschieden, so dass neben dem Wirbelfeld noch ein Quellenfeld besteht.

Die beiden durchgeführten Darstellungsweisen sind eben als die natürlichsten auch die einfachsten.

Ueber Definition und Behandlung transitiver Gruppen.

(Von Herrn *Hoyer* in Burg.)

Einleitung.

Seit *Cayley* ist der ursprünglichen *Cauchy*schen Auffassung und Behandlung einer endlichen Gruppe als conjugirtes Substitutionssystem eine andere an die Seite getreten, die darin besteht, dass von der Darstellung der Gruppenglieder durch Elementvertauschungen abgesehen und das zwischen den Gliedern bestehende System der Relationen zum Gegenstand der Betrachtung gemacht wird.*) Da aber das System der Relationen zwischen den Gruppengliedern für alle holoëdrisch isomorphen Gruppen dasselbe ist, so muss man, will man diese Gruppen unterscheiden, wieder auf die Darstellung der Glieder durch Elementvertauschungen zurückgreifen. Darin liegt ein Mangel dieser Behandlungsweise, der bei richtiger Auffassung der Sache in der Natur derselben keineswegs begründet erscheint. Das System der Relationen zwischen den Gruppen*gliedern* bildet nämlich, wie ich am Schlusse dieser Abhandlung (§ 5.) zeigen werde, nur einen *besonderen Fall* des zwischen den *Elementen* einer *beliebigen* Gruppe bestehenden Gleichungssystems. Macht man aber dieses letztere Gleichungssystem zum Gegenstand der Betrachtung, so tritt *ganz allgemein* als Mittel der Behandlung an die

*) Herr *Dyck* hat in seiner Abhandlung „Gruppentheoretische Studien“, Math. Ann. Bd. 20, gezeigt, wie auf diese Weise durch ein System von Relationen zwischen den Gliedern eines erzeugenden Systems die Gruppe zu definiren ist.

Stelle der Darstellung der Gruppenglieder durch Elementvertauschungen das Operiren mit den Gleichungen zwischen ihren Elementen. Ich werde in der vorliegenden Abhandlung dies der Einfachheit halber nur für transitive Gruppen zeigen; es ist indessen unschwer zu erkennen, dass das Princip der Behandlungsweise sich auch auf intransitive Gruppen ausdehnen lässt. Natürlich stellen die Gleichungen zwischen den Elementen Bedingungen dar, die den Operationen auferlegt sind. Die Operationen und damit die Elementvertauschungen sind daher durch die Gleichungen zwischen den Elementen bestimmt, und umgekehrt. Aber diese Elementvertauschungen bilden ebenso wenig das Mittel der Behandlung, wie bei Betrachtung des Systems der Relationen zwischen den Gruppengliedern die durch diese bestimmten Elementvertauschungen bei Auffassung der Gruppe als solche von gleicher Grad- und Ordnungszahl.

Es ist nicht uninteressant zu sehen, wie Fragen, die bei der Beschränkung auf den besonderen Fall der Relationen zwischen den Gruppengliedern sich nur schwer allgemeingültig erledigen lassen, wie die Frage nach der kleinsten Anzahl der definirenden Relationen und nach der Endlichkeit der durch sie definirten Gruppe, also Fragen, die für die Anwendung dieser Behandlungsweise von Wichtigkeit sind, sich bei der hier entwickelten allgemeinen Auffassung der definirenden Gleichungen auch völlig allgemeingültig beantworten lassen. In § 2 und 3 werde ich diese Fragen behandeln, in § 4 sodann noch als Anwendung dieser Behandlungsweise die Bestimmung der Systeme der Imprimitivität einer Gruppe geben.

§ 1.

Das definirende Gleichungssystem einer transitiven Gruppe.

Unter „Operation“ soll im Folgenden irgend ein Vorstellungsact verstanden werden, durch den an die Stelle eines Elementes in der Vorstellung ein anderes treten (entstehen) kann, und den wir zunächst nur der folgenden Voraussetzung unterwerfen.

I. Zwei Elemente e'_α, e'_β, die durch dieselbe Operation aus zwei Elementen e_α, e_β entstanden sind, sollen gleich oder verschieden von einander sein, je nachdem die Elemente e_α, e_β gleich oder verschieden von einander sind.

Wenden wir eine Reihe solcher Operationen $1, 2, \ldots, \nu$ an auf das-

selbe Element e, ebenso auf jedes so entstandene Element u. s. f., so entsteht eine unendliche Reihe von Elementen

$$e_0, e_1, e_2, \ldots, e_\nu, e_{11}, e_{12}, \ldots e_{\nu\nu}, \ldots,$$

wenn durch $e_{\alpha,\beta,\ldots,\lambda}$ das durch Anwendung der Operationsfolge $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ entstandene Element bezeichnet wird.*) Ein solches Element $e_{\alpha,\beta,\ldots,\lambda}$ soll dabei ein Element k-ter Klasse heissen, wenn die Anzahl der Operationen $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, durch die es entstanden ist, gleich k ist. Da jedes dieser Elemente aus demselben Element e entstanden ist, so werden wir ohne weitere besondere Voraussetzung über die Operationen $1, \ldots, \nu$ die Elemente als verschieden von einander anzusehen haben, m. a. W.: die Voraussetzung, dass gewisse dieser Elemente gleich sein sollen, involvirt eine weitere Voraussetzung über die Operationen $1, \ldots, \nu$. Wir wollen nun diese Voraussetzung machen, also annehmen, dass ein System (S) von Gleichungen

$$e_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k} = e_{\beta_1,\ldots,\beta_l}, \qquad e_{\alpha'_1,\ldots,\alpha'_{k'}} = e_{\beta'_1,\ldots,\beta'_{l'}}, \ldots$$

zwischen den Elementen bestehe. Dadurch wird das System (E) sämmtlicher Elemente auf ein System (E') von einander verschiedener Elemente, d. h. solcher Elemente reducirt, von denen keine zwei zufolge (S) einander gleich sind, während jedes andere Element einem Elemente von (E') gleich ist. Dabei kann natürlich jedes Element von (E') durch ein ihm gleiches ersetzt werden. Fügen wir endlich noch die Voraussetzung hinzu, dass

II. Durch das Gleichungssystem (S) das System (E) sämmtlicher Elemente auf ein endliches System (E') von einander verschiedener Elemente reducirt werden soll,

so ist durch (S) eine endliche Substitutionsgruppe (G) definirt, in welcher die Elemente von (E') die Elemente der Substitutionen und die ν Vertauschungen, welche die Elemente von (E') durch Anwendung der Operationen $1, \ldots, \nu$ erfahren, ein System erzeugender Substitutionen bilden. Diese Gruppe (G) ist transitiv, da an die Stelle des Elements e jedes Element $e_{\alpha,\beta,\ldots,\lambda}$ durch die Operationsfolge $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ treten kann. Wir nennen daher (S) *„ein definirendes Gleichungssystem von (G).“* Wird umgekehrt durch e ein Element, durch $S_1, \ldots, S_\nu$ ein System erzeugender Substitutionen einer transitiven Gruppe (G) bezeichnet, so werden stets zwei Elemente $e_{\alpha,\beta,\ldots,\lambda}$,

*) Der Index 0 als Zeichen der Nichtanwendung einer Operation kann dabei nach Belieben hinzugefügt oder fortgelassen werden.

$e_{\alpha',\beta',\ldots,\lambda'}$ die durch Anwendung von resp. $S_\alpha . S_\beta \ldots S_\lambda$, $S_{\alpha'} . S_{\beta'} \ldots S_{\lambda'}$ aus e entstanden sind, einander gleich zu setzen sein, wenn beide Producte das Element e durch dasselbe Element ersetzen. Die Vertauschungen, welche aus dem so erhaltenen Gleichungssystem (S) zwischen den Elementen abzuleiten sind, müssen aber, da $S_1, \ldots, S_\nu$ ein System erzeugender Substitutionen sein sollte, sämmtliche Substitutionen der Gruppe und wegen der Transitivität der Gruppe auch jede vollständig darstellen.*)

§ 2.

Die kleinsten definirenden Gleichungssysteme.

Die Anwendbarkeit der im § 1 gegebenen Definition einer transitiven Gruppe durch ein System von Gleichungen zwischen den Elementen verlangt vor allem die Entscheidung der Frage:

1. Wann ist durch ein gegebenes Gleichungssystem (S) zwischen den Elementen eine endliche Gruppe definirt?

Da die Anzahl der Elemente unendlich ist, so muss die Anzahl *aller* zwischen den Elementen bestehenden Gleichungen offenbar unendlich gross sein, wenn dieselben eine endliche Gruppe definiren. Es fragt sich daher zunächst, ob diese Gleichungen gemäss der über die Operationen gemachten Voraussetzung (I.) als Folgen eines endlichen Gleichungssystems zu betrachten sind. Damit führt die Beantwortung der obigen Frage auf die andere zurück:

2. Welches ist die kleinste Anzahl von Gleichungen, durch die eine endliche Gruppe definirt ist?

Die Beantwortung dieser Frage soll daher zuerst gegeben werden.

Wir setzen also jetzt die durch ein Gleichungssystem (S) definirte Gruppe als endlich voraus und verstehen alsdann unter

$$e_{\alpha_1',\ldots,\alpha_{k_1}'}, \quad e_{\alpha_1'',\ldots,\alpha_{k_2}''}, \quad \ldots \quad e_{\alpha_1^{(n)},\ldots,\alpha_{kn}^{(n)}},$$

ein vollständiges System (E') verschiedener Elemente derselben, das wir auf folgende Weise entstanden denken. Wir reduciren zunächst das System $e_1, \ldots, e_\nu$ der Elemente 1ter Klasse auf ein vollständiges System von einander und von e_0 verschiedener Elemente $e_\alpha, e_\beta, \ldots, e_\lambda$, wenden auf diese

---

*) Als Beispiel diene die Definition der symmetrischen Gruppe von $\nu+1$ Elementen durch das System der ν^2 Gleichungen;

$$e_{\alpha\alpha} = e\,(\alpha = 1,\ldots,\nu), \quad e_{\alpha\beta} = e_\alpha\,(\alpha = 1,\ldots,\nu,\ \beta = 1,\ldots,\nu) \qquad (\alpha \gtrless \beta).$$

Elemente $e_\alpha, e_\beta, \ldots, e_\lambda$ die Operationen $1, \ldots, \nu$ an und reduciren wieder die erhaltenen Elemente 2ter Klasse auf ein vollständiges System von einander und den Elementen 0ter und 1ter Klasse verschiedener Elemente u. s. f., bis keine von den übrig gebliebenen Elementen verschiedene mehr vorhanden sind. Wenden wir jetzt auf die Elemente von (E') die Operationen $1, \ldots, \nu$ an, so müssen die entstandenen νn Elemente sämmtlich den Elementen von E' gleich sein, und es ergiebt sich somit ein System von νn Gleichungen

$$(A.) \qquad e_{\alpha_1^\varrho, \ldots, \alpha_{k_\varrho}^\varrho, \beta} = e_{\alpha^\gamma \varrho\beta, \ldots, \alpha_{k\gamma\varrho\beta}^{\gamma\varrho\beta}} \qquad (\varrho = 1, \ldots, n, \quad \beta = 1, \ldots, \nu)$$

als enthalten in dem System (S). Durch dieses Gleichungsystem ergiebt sich ferner jedes nicht in (E') enthaltene Element e_β gleich einem Element von (E'), folglich auch (nach Vor. I.) jedes Element $e_{\beta\gamma}$, $e_{\beta\gamma\delta}$ u. s. w. Sind daher $e_{\lambda_1, \ldots, \lambda_k}$, $e_{\mu_1, \ldots, \mu_l}$ zwei gleiche Elemente, so müssen sich diese dem System (A.) zufolge gleich demselben Element von (E') ergeben, also die Gleichung $e_{\lambda_1, \ldots, \lambda_k} = e_{\mu_1, \ldots, \mu_l}$ sich als Folge von (A.) erweisen. Durch das Gleichungssystem (A.) ist also die Gruppe definirt. Von diesen Gleichungen sind aber $n-1$ Gleichungen Identitäten. Denn der Bildung von (E') gemäss findet sich in (E') neben jedem Element $e_{\alpha_1^\varrho, \ldots, \alpha_{k_\varrho - 1}^\varrho, \alpha_{k_\varrho}^\varrho}$ auch das Element $e_{\alpha_1^\varrho, \ldots, \alpha_{k_\varrho - 1}^\varrho}$. Mithin stimmen in $n-1$ der Elemente $e_{\alpha_1^\varrho, \ldots, \alpha_{k_\varrho}^\varrho, \beta}$ des Gleichungssystems (A.) die Indicesverbindungen $(\alpha_1^\varrho, \ldots, \alpha_{k_\varrho}^\varrho \beta)$ überein mit den Indicesverbindungen der von e_0 verschiedenen Elemente in (E'), also mit den Indicesverbindungen auf den rechten Seiten der Gleichungen (A.). Es bleiben somit $\nu n - (n-1)$ Gleichungen des Systems (A.) als definirende Gleichungen übrig, von denen wir nun zeigen wollen, dass sie auch ein kleinstmögliches System definirender Gleichungen bilden.

Der Beweis für diese Behauptung ist nicht ohne einige Vorbereitungen zu erledigen, weil zwei Gleichungen $e_{\lambda_1, \ldots, \lambda_k} = e_{\mu_1, \ldots, \mu}$, $e_{\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \pi} = e_{\mu_1, \ldots, \mu_l, \pi}$, von denen nach Vor. I. die eine eine Folge der anderen ist, sich nicht im Sinne der Arithmethik als Folgen von einander ergeben. Es gelingt indessen einen strengen Beweis zu führen, wenn man die Untersuchung auf das Gebiet der Arithmethik hinüberspielt. Hierzu lassen wir den n Elementen $e_{\alpha_1^\sigma, \ldots, \alpha_{k_\sigma}^\sigma}$ $(\sigma = 1, \ldots, n)$ des Systems (E') n ***Grössen*** resp. $p_{\alpha_1^\sigma, \ldots, \alpha_{k_\sigma}^\sigma}$ $(\sigma = 1, \ldots, n)$ entsprechen, von denen die dem Element e_0 entsprechende $p_0 = 0$ sein soll, während die übrigen $n-1$ unbeschränkt Veränderliche sein

sollen. Ebenso mögen $\nu n-(n-1)$ weitere unbeschränkt veränderliche Grössen $p_{a_1^{\tau_\sigma},\ldots,a_{k_{\tau_\sigma}}^{\tau_\sigma},\beta_{\tau_\sigma}}$ $(\sigma=1,\ldots,\nu n-n+1)$ resp. denjenigen $\nu n-(n-1)$ Elementen $e_{a_1^{\tau_\sigma},\ldots,a_{k_{\tau_\sigma}}^{\tau_\sigma},\beta_{\tau_\sigma}}$ $(\sigma=1,\ldots,\nu n-n+1)$ auf der linken Seite des Gleichungssytems (A.) entsprechen, welche den in (A.) enthaltenen definirenden Gleichungen angehören, deren Indicesverbindungen $(\alpha_1^{\tau\sigma},\ldots,\alpha_{k_{\tau_\sigma}}^{\tau\sigma},\beta_{\tau_\sigma})$ sich also nicht unter den Indicesverbindungen der Elemente von (E') vorfinden. Endlich soll jeder Elementgleichung $e_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}=e_{\mu_1,\ldots,\mu_l}$ ein Aggregat solcher Grössen p entsprechen. Ist nämlich

$$e_{\lambda_1,\ldots,\lambda_m}=e_{a_1^{t_m},\ldots,a_{k_{t_m}}^{t_m}} \qquad (m=1,\ldots,r),$$

$$e_{\mu_1,\ldots,\mu_m}=e_{a_1^{s_m},\ldots,a_{k_{s_m}}^{s_m}} \qquad (m=1,\ldots,l),$$

wo die Indicesverbindungen $(\alpha_1^{t_m},\ldots,\alpha_{k_{t_m}}^{t_m})$, $(\alpha_1^{s_m},\ldots,\alpha_{k_{s_m}}^{s_m})$ Elementen von (E') angehören, und setzt man alsdann

$$\Sigma_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}=p_0+p_{\lambda_1}+p_{a_1^{t_1},\ldots,a_{k_{t_1}}^{t_1},\lambda_2}+p_{a_1^{t_2},\ldots,a_{k_{t_2}}^{t_2},\lambda_3}+\cdots+p_{a_1^{t_{r-1}},\ldots,a_{k_{t_{r-1}}}^{t_{r-1}},\lambda_r}$$

$$\Sigma_{\mu_1,\ldots,\mu_l}=p_0+p_{\mu_1}+p_{a_1^{s_1},\ldots,a_{k_{s_1}}^{s_1},\mu_2}+p_{a_1^{s_2},\ldots,a_{k_{s_2}}^{s_2},\mu_3}+\cdots+p_{a_1^{s_{l-1}},\ldots,a_{k_{s_{l-1}}}^{s_{l-1}},\mu_l}$$

so soll die Differenz $\Sigma_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}-\Sigma_{\mu_1,\ldots,\mu_l}$ der Gleichung $e_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}=e_{\mu_1,\ldots,\mu_l}$ entsprechen. Dann sind offenbar zwei Differenzen, welche zwei Gleichungen der Form $e_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}=e_{\mu_1,\ldots,\mu_l}$, $e_{\mu_1,\ldots,\mu_l}=e_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}$ entsprechen, entgegengesetzte Grössen und eine Differenz $\Sigma_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}-\Sigma'_{\lambda'_1,\ldots,\lambda'_{r'}}$, welche einer als Folge zweier Gleichungen $e_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}=e_{\mu_1,\ldots,\lambda_l}$, $e_{\mu_1,\ldots,\mu_l}=e'_{\lambda'_1,\ldots,\lambda'_{r'}}$ erhaltenen Gleichung $e_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}=e'_{\lambda'_1,\ldots,\lambda'_r}$ entspricht, ist die Summe der den einzelnen Gleichungen entsprechenden Differenzen $\Sigma_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}-\Sigma_{\mu_1,\ldots,\mu_l}$, $\Sigma_{\mu_1,\ldots,\mu_l}-\Sigma'_{\lambda'_1,\ldots,\lambda'_{r'}}$. Entsprechen endlich die Differenzen $\Sigma_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}-\Sigma_{\mu_1,\ldots,\mu_l}$, $\Sigma_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r\delta}-\Sigma_{\mu_1,\ldots,\mu_l\delta}$ zwei Gleichungen $e_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}=e_{\mu_1,\ldots,\mu_l}$, $e_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r\delta}=e_{\mu_1,\ldots,\mu_l\delta}$, von denen also die eine nach Vor. I. eine Folge der andern ist, so wird

$$\Sigma_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}-\Sigma_{\mu_1,\ldots,\mu_l}=\Sigma_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r\delta}-\Sigma_{\mu_1,\ldots,\mu_l\delta},$$

da

$$\Sigma_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r\delta}=\Sigma_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}+p_{a_1^{t_r},\ldots,a_{k_{t_r}}^{t_r}\delta},$$

$$\Sigma_{\mu_1,\ldots,\mu_l\delta}=\Sigma_{\mu_1,\ldots,\mu_l}+p_{a_1^{s_l},\ldots,a_{k_{s_l}}^{s_l}\delta}$$

ist, hier aber $(\alpha_1^{t_r}, \ldots, \alpha_{k_{t_r}}^{t_r})$, $(\alpha_1^{s_l}, \ldots, \alpha_{k_{s_l}}^{s_l})$ dieselbe Indicesverbindung eines Elements von (E') darstellen, desjenigen nämlich, dem die Elemente $e_{\lambda_1, \ldots, \lambda_r}$, $e_{\mu_1, \ldots, \mu_l}$ gleich sind. Daraus folgt nun sofort, dass einer Elementgleichung, die sich aus anderen Elementgleichungen als Folge dieser ableiten lässt, eine Differenz entsprechen muss, die eine lineare homogene ganzzahlige Function der den einzelnen Elementgleichungen entsprechenden Differenzen ist. Wären nun die $\nu n - (n-1)$ in (A.) enthaltenen definirenden Gleichungen aus einer kleineren Anzahl von Elementgleichungen abzuleiten, so müsste folglich zwischen ihren entsprechenden $\nu n - (n-1)$ Differenzen eine lineare homogene Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten bestehen. Das ist aber unmöglich, denn jede dieser $\nu n - (n-1)$ Differenzen enthält mit dem Coefficienten 1 behaftet eine der $\nu n - (n-1)$ Veränderlichen

$$p_{\alpha_1^{\tau_\sigma}, \ldots, \alpha_{k_{t_\sigma}}^{\tau_\sigma}, \beta_{\tau_\sigma}} \qquad (\sigma = 1 \ldots \nu n - n + 1)$$

und diese Veränderliche kommt in keiner der übrigen der $\nu n - (n-1)$ Differenzen vor.

Wir erhalten damit den Satz:

Wird ein durch ν Operationen entstandenes Elementsystem

$$e, e_1, \ldots, e_\nu, e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{\nu\nu} \ldots .$$

durch Gleichungen zwischen den Elementen auf n von einander verschiedene Elemente reducirt, so kann man die Gleichungen zwischen den Elementen aus $\nu n - n + 1$ Gleichungen, aber aus keiner kleineren Anzahl von Gleichungen ableiten, die zwischen den Elementen bestehen.

§ 3.

Kriterium der Endlichkeit einer Gruppe.

Nach dem vorigen Paragraphen muss jedes zwischen den Elementen bestehende Gleichungssystem, durch das eine endliche transitive Gruppe definirt wird, aus einer endlichen Anzahl von Gleichungen sich ableiten lassen. Umgekehrt aber ist nicht durch jedes zwischen den Elementen bestehende endliche Gleichungssytem und die aus ihm abzuleitenden Gleichungen eine endliche Gruppe definirt. Es bedarf also eines Kriteriums dafür, wann dies der Fall ist oder nicht.

Wir setzen daher jetzt voraus, dass zwischen den Elementen ein endliches Gleichungssystem (*S.*) bestehe, das keine Elemente höherer als der k-ten Klasse enthält. Alsdann kann man zunächst die Elemente 0-ter bis

k-ter Klasse in Systeme gleicher Elemente scheiden, indem man je zwei gleiche Elemente und je zwei Elemente, die aus zwei gleichen Elementen durch Hinzufügen oder Fortlassen desselben letzten Index entstanden, also nach Vor. I. ebenfalls als gleich zu betrachten sind, in einem Systeme vereinigt, bis je zwei aus zwei Elementen eines und desselben Systems durch Hinzufügen oder Fortlassen desselben letzten Index entstandene Elemente wieder einem und demselben System angehören. Durch alleinige Berücksichtigung der Elemente 0-ter bis k-ter Klasse kann dann eine Gleichung zwischen zwei Elementen verschiedener dieser Systeme sich nicht aus (S.) ableiten lassen. Wir bezeichnen diese Systeme durch $E_1, \ldots, E_n$, $E_{n+1}, \ldots, E_{n+m}$, wobei durch $E_{n+1}, \ldots, E_{n+m}$ diejenigen unter ihnen bezeichnet werden sollen, die nur Elemente k-ter Klasse enthalten. Jedes Element $(k+1)$-ter Klasse $(e_{\lambda_1, \ldots, \lambda_k \lambda_{k+1}})$ ist nun aus einem Element k-ter Klasse $e_{\lambda_1, \ldots, \lambda_k}$ durch Anwendung der Operation λ_{k+1} entstanden. Gehört $e_{\lambda_1, \ldots, \lambda_k}$ einem System E_α der n ersten Systeme $E_1, \ldots, E_n$ an, so enthält E_α auch Elemente 0-, $\ldots$, $(k-1)$-ter Klasse, die durch Anwendung von λ_{k+1} sämmtlich in Elemente eines der Systeme

$$E_1, \ldots, E_{n+m}$$

übergehen. Diesem Systeme ist alsdann $e_{\lambda_1, \ldots, \lambda_k \lambda_{k+1}}$ als gleich zuzuordnen. Gehört dagegen $e_{\lambda_1, \ldots, \lambda_k}$ einem der Systeme $E_{n+1}, \ldots, E_{n+m}$ an, so gehen die Elemente dieses Systems sämmtlich durch Anwendung von λ_{k+1} in Elemente $(k+1)$-ter Klasse über, die für sich ein neues System bilden. Auf diese Weise werden die Elemente 0- bis $(k+1)$-ter Klasse in $n+m+\nu m$-Systeme gleicher Elemente $E'_1, \ldots, E'_{n+m}$, $E'_{n+m+1}, \ldots, E'_{n+m+\nu m}$ geschieden, unter denen die Systeme $E'_{n+m+1}, \ldots, E'_{n+m+\nu m}$ nur Elemente $(k+1)$-ter Klasse enthalten. Da hierbei stets zwei Elemente, die aus einem und demselben System durch Hinzufügen oder Fortlassen desselben letzten Index entstehen, wieder einem und demselben System angehören, so kann die alleinige Berücksichtigung der Elemente 0- bis $(k+1)$-ter Klasse keine Gleichung zwischen zwei Elementen verschiedener Systeme ergeben. Der Uebergang zu den Elementen $(k+2)$-ter Klasse liefert aber, wenn $m > 0$ ist, wieder eine grössere Anzahl, nämlich $n+m+\nu m+\nu^2 m$ solche Systeme, also ebenso viele verschiedene Elemente, und es muss mithin die Anzahl der verschiedenen Elemente sich immer grösser ergeben, also unendlich gross sein. Ist dagegen $m = 0$, so bleibt die Anzahl der Systeme, also auch der verschiedenen Elemente, gleich n. Wir erhalten mithin als Kriterium der Endlichkeit:

Damit durch ein Gleichungssystem (S.) zwischen den Elementen 0- bis k-ter Klasse eine endliche transitive Gruppe definirt ist, ist nothwendig und hinreichend, dass durch die Gleichungen, die bei alleiniger Berücksichtigung der Elemente 0- bis k-ter Klasse zwischen diesen Elementen aus (S.) abzuleiten sind, jedes Element k-ter Klasse gleich einem Element niedrigerer Klasse gesetzt wird.

So wird durch das System der $\nu(\nu-1)$ Gleichungen

$$e_{\alpha\beta} = e_\alpha \quad (\alpha \gtrless \beta;\ \alpha = 1, \ldots, \nu;\ \beta = 1, \ldots, \nu)$$

keine endliche Gruppe definirt, da durch dasselbe die Elemente

$$e_{\alpha\alpha} \quad (\alpha = 1, \ldots, \nu)$$

nicht gleich Elementen 0-ter oder 1-ter Klasse gesetzt werden. Fügt man dagegen noch die Gleichungen $e_{\alpha\alpha} = e$ $(\alpha = 1, \ldots, \nu)$ hinzu, so stellt das erhaltene System von ν^2 Gleichungen ein definirendes Gleichungssystem der symmetrischen Gruppe der $\nu+1$ Elemente $e, e_1, \ldots, e_\nu$ dar und bildet gleichzeitig ein kleinstes solches definirendes Gleichungssystem, das zuf. § 2 $(\nu-1)(\nu+1)+1=\nu^2$ Gleichungen enthalten muss.

Als zweites Beispiel diene das Gleichungssystem

$$(A.) \qquad e_{1^\lambda,\alpha} = e_{1^{f_\alpha(\lambda)}} \qquad (\lambda = 0, \ldots, n-1;\ \alpha = 2, \ldots, \nu),$$

wo 1^λ die λ-malige Wiederholung des Index 1 $(1^0 = 0)$ und $f_\alpha(\lambda)$ eine von λ abhängige Zahl bezeichnen soll, die wieder der Zahlenreihe $0, \ldots, n-1$ angehört. Durch diese $(\nu-1)n$ Gleichungen wird jedes Element n-ter Klasse $(n \geqq 2)$ einem der Elemente $e, e_1, \ldots, e_{1^{n-1}}$ gleich gesetzt*), mit Ausnahme allein des Elements e_{1^n}; es wird also durch diese Gleichungen keine endliche Gruppe definirt. Fügen wir dagegen noch die Gleichung hinzu

$$(B.) \qquad e_{1^n} = e,$$

so erhalten wir eine endliche transitive Gruppe. Setzen wir noch die Functionen f_α so gewählt voraus, dass aus $f_\alpha(\lambda) = f_\alpha(\lambda')$ auch $\lambda = \lambda'$ folgt, so sind $e, e_1, e_{1^2}, \ldots, e_{1^{n-1}}$ die verschiedenen Elemente dieser Gruppe, und die $(\nu-1)n+1$-Gleichungen (A.) und (B.) bilden ein kleinstes definirendes Gleichungssystem derselben. Die Gruppe selbst kann jede beliebige Gruppe sein, die eine Circularsubstitution ihrer sämmtlichen Elemente enthält.

---

*) z. B. $e_{1^{\lambda},\alpha,\beta} = e_{1^{f_\alpha(\lambda)},\beta} = e_{1^{f_\beta f_\alpha(\lambda)}}$ u. s. w.

§ 4.

Die Systeme der Imprimitivität.

Fügt man zu einem definirenden Gleichheitssysteme (*S.*) einer transitiven Gruppe (*G.*) Gleichungen hinzu, die sich nicht aus (*S.*) ableiten lassen, so müssen durch das so erhaltene neue Gleichungssystem (*S'.*) Elemente einander gleich gesetzt werden, die zuf. (*S.*) sich nicht als gleich, also als verschieden von einander erweisen. Ein vollständiges System E' verschiedener Elemente von (*G.*) wird also durch (*S'.*) in Systeme $E'_1, \ldots, E'_\varrho$ von gleichen Elementen geschieden, und durch (*S'.*) somit eine Gruppe (*G'.*) definirt, deren Elementzahl ϱ kleiner als die von (*G.*) ist. Sind nun

$$e_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}, \quad e_{\beta_1, \ldots, \beta_l}$$

zwei Elemente eines dieser Systeme $E'_1, \ldots, E'_\varrho$, sodass also zuf. (*S.*)

$$e_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} = e_{\beta_1, \ldots, \beta_l}$$

ist, so ist auch zuf. (*S'.*) $e_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k \gamma} = e_{\beta_1, \ldots, \beta_l \gamma}$. Dann aber müssen zuf. (*S.*) $e_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k \gamma}$, $e_{\beta_1, \ldots, \beta_l \gamma}$ zwei Elementen ***eines*** der Systeme $E'_1, \ldots, E'_\varrho$ gleich sein. Jede Operation γ führt also zufolge (*S.*) zwei Elemente eines der Systeme $E'_1, \ldots, E'_\varrho$ wieder in zwei Elemente eines dieser Systeme über, die Systeme $E'_1, \ldots, E'_\varrho$ sind somit Systeme der Imprimitivität der Gruppe (*G.*), der Grad ϱ von (*G'.*) ist also ein Theiler desjenigen von (*G.*). Ferner werden zuf. (*S'.*) je zwei Substitutionen von (*G.*) einander gleich, welche die Systeme $E'_1, \ldots, E'_\varrho$ in gleicher Weise vertauschen, der Identität werden mithin die Glieder der invarianten Unterpruppe von (*G.*) gleich, welche die Elemente jedes Systems gegen einander vertauschen. Ist deren Ordnung > 1, so ist folglich auch die Ordnung von (*G'.*) ein Theiler derjenigen von (*G.*). Die Substitutionen von (*G'.*) vertauschen ein System von Elementen, das durch Auswahl je eines Repräsentanten aus den Systemen $E'_1, \ldots, E'_\varrho$ erhalten ist, ebenso wie die entsprechenden Substitutionen von (*G.*) die Systeme $E'_1, \ldots, E'_\varrho$; (*G'.*) kann also als die Gruppe dieser Vertauschungen betrachtet werden.

Es seien umgekehrt $E'_1, \ldots, E'_\varrho$ Systeme der Imprimitivität, in die man ein vollständiges System E' der durch (*S.*) definirten Gruppe (*G.*) scheiden kann. Denkt man sich nun dem System aller zuf. (*S.*) zwischen den Elementen bestehenden Gleichungen alle die Gleichungen hinzugefügt, die sich ergeben, wenn man je zwei Elemente eines jeden der Systeme $E'_1, \ldots, E'_\varrho$ und ebenso je zwei Elemente, die zuf. (*S.*) zwei Elementen eines solchen

Systems gleich sind, einander gleich setzt, so kann als Folge des so erhaltenen Gleichungssystems (S'.) sich auch nie eine Gleichung zwischen zwei Elementen verschiedener der Systeme $E'_1, \ldots, E'_\varrho$ ergeben. Denn sind zuf. (*S*.) die Elemente $e_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}$, $e_{\beta_1,\ldots,\beta_l}$ zwei Elementen eines der Systeme $E'_1, \ldots, E'_\varrho$ gleich; so sind zuf. (*S*.) auch die Elemente $e_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k\gamma}$, $e_{\beta_1,\ldots,\beta\gamma}$ zwei Elementen eines dieser Systeme gleich, und umgekehrt. Von zwei Gleichungen

$$e_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k} = e_{\beta_1,\ldots,\beta_l} \text{ und } e_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k\gamma} = e_{\beta_1,\ldots,\beta_l\gamma},$$

von denen die eine nach Vor. I. eine Folge der anderen ist und eine dem System (S'.) angehört, gehört also auch die andere dem System (S'.) an. Nun lassen sich aber auch sämmtliche Gleichungen von (S'.) aus dem Gleichungssystem ableiten, das man erhält, wennn man zu (*S*.) die durch Gleichsetzen der Elemente eines der Systeme $E'_1, \ldots, E'_\varrho$ entstehenden Gleichungen hinzufügt. Denn werden etwa die Elemente von E'_1 einander gleich gesetzt, und sind $e_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}$, $e_{\beta_1,\ldots,\beta_l}$ zwei Elemente, die zuf. (*S*.) zwei Elementen eines beliebigen der Systeme $E'_1, \ldots, E'_\varrho$ gleich sind, so giebt es stets eine Operationsfolge $\gamma\delta, \ldots, \lambda$ und zwei Elemente $e_{\alpha'_1,\ldots,\alpha'_k}$, $e_{\beta'_1,\ldots,\alpha'_l}$ in E'_1, derart, dass $e_{\alpha'_1,\ldots,\alpha'_k\,\gamma\delta,\ldots,\lambda} = e_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}$ und $e_{\beta'_1,\ldots,\beta'_l\,\gamma\delta,\ldots,\lambda} = e_{\beta_1,\ldots,\beta_l}$ zuf. (*S*.) ist. Aus der Gleichung $e_{\alpha'_1,\ldots,\alpha'_k} = e_{\beta'_1,\ldots,\beta'_l}$ folgt somit auch die andere $e_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k} = e_{\beta_1,\ldots,\beta_l}$. Das Gleichsetzen der Elemente eines der Systeme $E'_1, \ldots, E'_\varrho$ zieht also die Gleichheit der Elemente jedes der übrigen Systeme, aber keine Gleichung zwischen zwei Elementen verschiedener dieser Systeme nach sich. Es ergiebt sich also der Satz:

Fügt man einem definirenden Gleichungssystem** (S.) **einer Gruppe** (G.) **ein System** (s.) **neuer Gleichungen zwischen den Elementen hinzu, so scheidet sich ein vollständiges System verschiedener Elemente von** (G.) **in Systeme gleich werdender Elemente. Diese Systeme sind gegen einander vertauschbare Systeme der Imprimitivität für** (G.), **und zwar sind sie die kleinsten Systeme dieser Art, welche die in** (s.) **enthaltenen Systeme gleichgesetzter Elemente umfassen.)

Setzt man zwei verschiedene Elemente einer primitiven Gruppe einander gleich, so müssen somit sämmtliche Elemente einander gleich werden.

---

*) Dieser Satz ist das Analogon zu dem Satze von Herrn *Dyck* über die Erweiterung des Systems der Relationen zwischen den Gliedern der Gruppe: „Gruppentheor. Studien“ I, Math. Ann., Bd. 20, §§ 4 u. 5 und II. Math. Ann. Bd. 22, § 3.

§ 5.

Die Relationen zwischen den Gliedern einer Gruppe.

Ist das zwischen den Elementen $e, e_1, \ldots, e_\nu, e_{11}, \ldots, e_{\nu\nu} \ldots$ einer transitiven Gruppe bestehende Gleichungssystem von der besonderen Beschaffenheit, dass

III. neben jeder Gleichung $e_{\lambda_1, \ldots, \lambda_k} = e_{\mu_1, \ldots, \mu_l}$ ***auch alle Gleichungen der Form***

$$e_{\alpha\lambda_1, \ldots, \lambda_k} = e_{\alpha\mu_1, \ldots, \mu_l} \qquad (\alpha = 1, \ldots, \nu)$$

bestehen,

so bestehen mit jeder Gleichung der Form $e_{\lambda_1, \ldots, \lambda_k} = e_{\mu_1, \ldots, \mu_l}$ auch alle Gleichungen der Form $e_{\alpha\beta\gamma, \ldots, \lambda_1, \ldots, \lambda_k} = e_{\alpha\beta\gamma, \ldots, \mu_1, \ldots, \mu_l}$. Mit jeder Gleichung der Form $e_{\alpha\varrho_1, \ldots, \varrho_k} = e_{\alpha\sigma_1, \ldots, \sigma_l}$ bestehen ferner auch die Gleichungen

$$e_{\alpha^2\varrho_1, \ldots, \varrho_k} = e_{\alpha^2\sigma_1, \ldots, \sigma_l}, \quad e_{\alpha^3\varrho_1, \ldots, \varrho_k} = e_{\alpha^3\sigma_1, \ldots, \sigma_l} \text{ u. s. w.,}$$

also da wegen der Endlichkeit der Anzahl der verschiedenen Elemente einmal $e_{\alpha^{m+p}} = e_{\alpha^p}$, $e_{\alpha^m} = e$ werden muss, besteht auch mit jeder Gleichung $e_{\alpha\varrho_1, \ldots, \varrho_k} = e_{\alpha\sigma_1, \ldots, \sigma_l}$ die Gleichung $e_{\varrho_1, \ldots, \varrho_k} = e_{\sigma_1, \ldots, \sigma_l}$. Wird also *ein* Element durch zwei Operationsfolgen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_l$ in gleiche Elemente übergeführt, so wird auch jedes Element durch diese Operationsfolgen in gleiche Elemente übergeführt. Jeder Elementgleichung $e_{\lambda_1, \ldots, \lambda_k} = e_{\mu_1, \ldots, \mu_l}$ entspricht also dann eine Relation $S_{\lambda_1} \ldots S_{\lambda_k} = S_{\mu_1} \ldots S_{\mu_l}$ zwischen den den Operationen entsprechenden Substitutionen, die Gruppe ist eine solche von gleicher Grad- und Ordnungszahl, und das System der Relationen zwischen den Substitutionen $S_1, \ldots, S_\nu$ ist nichts anderes, als das System der Gleichungen zwischen den Elementen $e, e_1, \ldots, e_\nu, e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{\nu\nu}, \ldots$ *in anderer Schreibweise.* Umgekehrt ist klar, dass auch für jede transitive Gruppe von gleicher Grad- und Ordnungszahl das System der Gleichungen zwischen den Elementen die Vor. III. erfüllt. ***Es erweist sich also das System der Relationen zwischen den Gliedern oder einem erzeugenden System von Gliedern einer Gruppe als ein besonderer Fall des Gleichungssystems, das zwischen den Elementen einer beliebigen transitiven Gruppe besteht.*** Da aber in diesem besonderen Fall zwei Gleichungen

$$e_{\alpha\lambda_1, \ldots, \lambda_k} = e_{\alpha\mu_1, \ldots, \mu_l}, \quad e_{\lambda_1, \ldots, \lambda_k} = e_{\mu_1, \ldots, \mu_l}, \qquad (\lambda_k \gtrless \mu_l)$$

von denen nach Vor. I. keine als Folge der andern allein zu betrachten ist, nach Vor. III. als Folgen von einander betrachtet werden können, so

ist klar, dass ein im Sinne des § 2 kleinstes definirendes Gleichungssystem diese Eigenschaft, ein ***kleinstes*** definirendes Gleichungssystem zu sein, verlieren kann, sobald für die Ableitung der Gleichungen aus einander sowohl die Vor. I, als auch Vor. III zu Grunde gelegt wird. In der That ist alsdann die in § 2 ermittelte Anzahl $\nu n - n + 1$ zu vermindern um einen Betrag, der indessen von der besonderen Beschaffenheit der Gleichungen abhängig ist.*)

*) Eine obere Grenze für die Anzahl der definirenden Relationen zwischen den Gruppengliedern ist von Herrn ***Dyck*** in seiner Abhandlung „Gruppentheoretische Studien“ Math. Ann. Bd. 20, § 13 abgeleitet worden.

Ein Satz über die Zerlegung homogener linearer Differentialausdrücke in irreducible Factoren.

(Von Herrn *Edmund Landau*.)

Herr *Frobenius**) hat in die Theorie der linearen Differentialgleichungen den Begriff der Irreducibilität eingeführt. Wenn die Coefficienten einer homogenen linearen Differentialgleichung**) einem gewissen Bereiche von Functionen angehören, so heisst die Differentialgleichung irreducibel in Bezug auf den Bereich, wenn sie mit keiner Differentialgleichung niedrigerer Ordnung, deren Coefficienten dem Bereiche angehören, ein Integral gemeinsam hat; anderenfalls heisst sie reducibel für den Bereich. Ist der gegebene Bereich so beschaffen, dass Summe, Differenz, Product und Quotient je zweier ihm angehörigen Functionen und der Differentialquotient jeder solchen Function gleichfalls in ihm vorkommt, so gilt nach Herrn *Frobenius****) der Satz:

„Eine Differentialgleichung

$$P(y) = 0,$$

die mit einer irreduciblen Differentialgleichung

$$Q(y) = 0$$

ein Integral gemeinsam hat, wird durch jedes Integral von $Q = 0$ befriedigt,

*) „Ueber den Begriff der Irreductibilität in der Theorie der linearen Differentialgleichungen“, dieses Journal, Bd. 76, 1873, S. 237.

**) Es handelt sich in dieser Arbeit durchweg um homogene lineare Differentialgleichungen und Differentialausdrücke, auch wenn dies nicht besonders bemerkt wird.

***) a. a. O., S. 257.

und es existirt ein Differentialausdruck R, dessen Coefficienten dem Bereiche angehören, für welchen

$$P = RQ$$

ist."

So fortschliessend gelangt man zu dem bekannten Satze*), dass der Differentialausdruck P in irreducible Factoren zerlegbar ist:

$$P = Q_\lambda Q_{\lambda-1} \dots Q_2 Q_1,$$

wo die Summe der Ordnungen von $Q_1, Q_2, \dots, Q_\lambda$ gleich der Ordnung n von P und das Product der Coefficienten der höchsten beziehlich in $Q_1, Q_2, \dots, Q_\lambda$ vorkommenden Ableitungen gleich dem Coefficienten von $y^{(n)}$ in P ist. Diese Zerlegung von P ist aber nicht eindeutig, schon aus dem Grunde, weil man einen beliebigen der Factoren Q_ϱ mit einer willkürlichen, dem Bereiche angehörigen Function von x multipliciren und dann entsprechend die Kette weiter nach links fortsetzen kann.**) Aber auch wenn man diese Willkürlichkeit durch die Verfügung beseitigt, dass in P und in allen Q_ϱ der Coefficient der höchsten vorkommenden Ableitung gleich 1 ist, kann die Zerlegung von P in irreducible Factoren mehrdeutig und sogar unendlich vieldeutig sein, wie folgendes einfache Beispiel lehrt: die linke Seite der im Bereiche der rationalen Functionen von x reduciblen Differentialgleichung

$$P(y) = y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 0,$$

deren allgemeines Integral

$$y = a x + b x^2$$

ist, ist durch jeden der unendlich vielen Differentialausdrücke erster Ordnung

$$Q(y) = y' - \frac{1 + 2cx}{x + cx^2} y$$

theilbar, wo c eine willkürliche Constante bezeichnet; für jedes c giebt es ein R, sodass $P = RQ$ ist.

Im Folgenden werde ich nun den Nachweis des Satzes führen:

---

*) Vergl. *Heffter*, „Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variablen", Leipzig 1894, S. 193 und *Schlesinger*, „Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen", Bd. 1, Leipzig 1895, S. 85.

**) Wenn P durch S theilbar ist, d. h. wenn $P = 0$ durch alle Lösungen von $S = 0$ befriedigt wird, so wird ja $P = 0$ auch durch alle Lösungen von $f(x) . S = 0$ befriedigt, da diese keine anderen sind als die von $S = 0$; P ist also durch $f(x) . S$ theilbar.

Bei allen Zerlegungen eines Differentialausdruckes in irreducible Factoren ist die Anzahl der Factoren dieselbe, und es sind die Ordnungen der Factoren, abgesehen von der Reihenfolge, dieselben.

Beweis: Der Satz ist evident für $n = 1$, da alsdann P stets irreducibel ist. Er gilt auch für $n = 2$; denn entweder P ist irreducibel, dann giebt es gar keine Zerlegungen ausser der identischen $P = P$; oder P ist reducibel, dann giebt es nur Zerlegungen in zwei Factoren erster Ordnung. Ich nehme den Satz für alle Ordnungen bis $n-1$ als bewiesen an und beweise ihn für n.

Es mögen

(1.) $$P = Q_\lambda Q_{\lambda-1} \ldots Q_2 Q_1,$$

(2.) $$P = K_\mu K_{\mu-1} \ldots K_2 K_1$$

zwei verschiedene Zerlegungen von P in irreducible Factoren sein; dann ist erstens zu zeigen, dass $\lambda = \mu$ ist, und zweitens, dass die Ordnungen der Q_ϱ in einer gewissen Reihenfolge beziehlich mit denen der K_σ übereinstimmen.

Ich vergleiche die beiden irreduciblen Differentialausdrücke Q_1 und K_1; es sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem sie eine (von Null verschiedene) Lösung gemeinsam haben oder nicht.

I. Wenn $Q_1 = 0$ und $K_1 = 0$ ein Integral gemeinsam haben, so sind nothwendig Q_1 und K_1 von gleicher Ordnung und stimmen abgesehen von einem nur von x abhängigen Factor überein:

$$K_1 = f(x) \cdot Q_1.$$

α) Wenn $f(x) = 1$, also $K_1 = Q_1$ ist, so folgt aus (1.) und (2.), dass

$$Q_\lambda Q_{\lambda-1} \ldots Q_2 = K_\mu K_{\mu-1} \ldots K_2$$

ist. Man hat hier einen Differentialausdruck von niedrigerer als der n-ten Ordnung, der auf zwei Arten in irreducible Factoren zerlegt ist; für einen solchen ist aber der Satz als bewiesen angenommen worden; daher ist $\lambda - 1 = \mu - 1$, d. h. $\lambda = \mu$, und die Ordnungen von $Q_\lambda, \ldots, Q_2$ stimmen beziehlich mit denen von $K_\mu, \ldots, K_2$ überein, womit die Behauptung auch für die beiden Zerlegungen (1.), (2.) von P bewiesen ist.

β) Ist $f(x)$ nicht gleich 1, so kann man aus

(3.) $$P = K_\mu \ldots K_3 K_2 K_1 = K_\mu \ldots K_3 K_2 (f Q_1)$$

dadurch eine mit Q_1 endigende Zerlegung von P in irreducible Factoren herleiten, dass man in $K_2 (f Q_1)$ die im Symbol K_2 enthaltenen Differential-

operationen ausführt und nach Ableitungen von Q_1 ordnet. In der entstehenden Gleichung

$$K_2(fQ_1) = RQ_1 \tag{4.}$$

ist R irreducibel. Denn es ist

$$K_2(fy) = R(y).$$

Wäre R reducibel, so gäbe es eine von 0 verschiedene Lösung y von $R(y) = 0$, welche einer Differentialgleichung niedrigerer Ordnung $S(y) = 0$ genügt; $S(y)$ lässt sich aber in die Form $T(fy)$ bringen, so dass $K_2 = 0$ mit der Differentialgleichung niedrigerer Ordnung $T = 0$ die Lösung $f(x) \cdot y$ gemeinsam hätte, also gegen die Voraussetzung reducibel wäre. Aus (3.), (4.) folgt also für P die neue Zerlegung

$$P = K_\mu \ldots K_3 R Q_1 \tag{5.}$$

in irreducible Factoren. (5.) hat dieselbe Factorenzahl wie (2.) mit beziehlich (sogar in derselben Reihenfolge) gleichen Ordnungen; in der That sind die $\mu - 2$ Factoren $K_\mu, \ldots, K_3$ in (2.) und (5.) vorhanden und K_2, R, sowie K_1, Q_1, sind von beziehlich gleicher Ordnung. (5.) hat nun mit (1.) den letzten Factor Q_1 gemeinsam; der Fall (β) ist also auf den bereits erledigten Fall (α) zurückgeführt.

II. Wenn $Q_1 = 0$ und $K_1 = 0$ kein Integral gemeinsam haben, so giebt es*) eine abgesehen von einem willkürlichen, nur von x abhängigen Factor wohlbestimmte Differentialgleichung $U = 0$ mit Coefficienten im Bereiche, deren Ordnung gleich der Summe der Ordnungen von Q_1 und K_1 ist und welche durch alle Lösungen von $Q_1 = 0$, sowie durch alle Lösungen von $K_1 = 0$ befriedigt wird. Das allgemeine Integral von $U = 0$ ist in der Form $y + z$ enthalten, wo y das allgemeine Integral von $Q_1 = 0$ und z das allgemeine Integral von $K_1 = 0$ bezeichnet. U ist einerseits durch Q_1, andererseits durch K_1 theilbar; es bestehen also zwei Gleichungen

$$U = AQ_1,$$
$$U = BK_1.$$

Q_1 und K_1 sind nach Voraussetzung irreducibel; ich behaupte, dass

*) Vergl. *Brassinne*, „Analogie des équations différentielles linéaires à coefficients variables avec les équations algébriques“, Note III in *Sturm*, „Cours d'analyse“, Bd. 2, und *Heffter*, „Ueber gemeinsame Vielfache linearer Differentialausdrücke und lineare Differentialgleichungen derselben Klasse“, dieses Journal, Bd. 116, 1896, S. 157.

auch A und B irreducibel sind. Wegen der Symmetrie genügt es, ersteres zu zeigen. Gesetzt, es gäbe eine Zerlegung

$$A = CD,$$

wo die Ordnungen von C und D grösser als 0 sind, so wäre

$$U = CDQ_1.$$

Jede Lösung von $Q_1 = 0$ befriedigt auch $DQ_1 = 0$, und jede Lösung von $DQ_1 = 0$ befriedigt auch $U = 0$, ist also von der Form $y + z$, wo $Q_1(y) = 0$, $K_1(z) = 0$. Da DQ_1 von höherer Ordnung ist als Q_1, hat also $DQ_1 = 0$ sicher eine Lösung der Form $y + z$, bei der z von 0 verschieden ist. Aus

$$DQ_1(y+z) = 0$$

folgt aber

$$DQ_1(y) + DQ_1(z) = 0,$$
$$DQ_1(z) = 0.$$

$DQ_1 = 0$ hat also mit der irreduciblen Differentialgleichung $K_1 = 0$ ein von 0 verschiedenes Integral z gemeinsam, wird daher durch jedes Integral z von $K_1 = 0$ befriedigt, also durch jedes $y+z$, d. h. durch jedes Integral von $U = 0$. DQ_1 kann also nicht von niedrigerer Ordnung sein als

$$U = AQ_1 = CDQ_1,$$

sodass die Annahme der Zerlegbarkeit von A zu einem Widerspruche führt. A und B sind also irreducibel.

Der vorgelegte Differentialausdruck P ist durch Q_1 und K_1, also durch U theilbar:

$$P = VU.$$

Es sei

$$V = L_\nu L_{\nu-1} \dots L_1$$

eine Zerlegung von V in irreducible Factoren. Dann erhält man ausser (1.) und (2.) noch folgende zwei Zerlegungen von P in irreducible Factoren:

(6.) $$P = L_\nu \dots L_1 A Q_1,$$

(7.) $$P = L_\nu \dots L_1 B K_1.$$

Aus (1.), (6.) folgt, da der letzte Factor übereinstimmt, nach (I. α), dass $\nu = \lambda - 2$ ist und dass die Ordnungen in (1.), (6.) abgesehen von der Reihenfolge beziehlich übereinstimmen. Das Entsprechende folgt für (2.), (7.); es ist $\nu = \mu - 2$, folglich $\lambda = \mu$. Der Vergleich von (6.), (7.) zeigt nun,

da die Ordnungen von A und K_1, sowie die von Q_1 und B beziehlich übereinstimmen, dass (6.) und (7.) gleich viele Factoren von beziehlich gleicher Ordnung haben. Also ist, wenn man von (1.) über (6.) und (7.) zu (2.) übergeht, die behauptete Invarianz für (1.) und (2.), d. h. für zwei beliebige Zerlegungen von P in irreducible Factoren bewiesen.

Der *Jordan*sche*) Satz über die Compositionsreihe einer endlichen Gruppe, an dessen Herleitung diese Beweismethode erinnert, hat zwar schon durch die Untersuchungen von *Lie***) und *Vessiot****) ein Analogon in der Theorie der linearen Differentialgleichungen gefunden, jedoch erst in einem viel höheren Theile, bei der Lehre von der Zerlegbarkeit der Transformationsgruppe der Differentialgleichung, während der im Vorstehenden bewiesene Satz in einem der elementarsten Kapitel seine Stelle findet.

---

*) „Traité des substitutions et des équations algébriques“, Paris 1870, S. 42 und 663.

**) „Zur Theorie der Berührungstransformationen“, Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. 14, 1888, S. 562 und „Theorie der Transformationsgruppen“, Bd. 3, Leipzig 1893, S. 704.

***) „Sur l'intégration des équations différentielles linéaires“, Annales scientifiques de l'école normale supérieure, 3me série, t. 9, 1892, S. 203—206; s. auch *Schlesinger*, „Handbuch etc.“, Bd. 2, Theil 1, Leipzig 1897, S. 83.

Eine Wechselbeziehung zwischen Functionen mehrerer Unbestimmten, die zu Reciprocitätsgesetzen führt.

(Von Herrn *H. Kühne* in Dortmund.)

1. Der Bereich der ganzen ganzzahligen Functionen von $x_1, \ldots, x_n$ werde mit $\mathfrak{B}$ bezeichnet, und es sei

$$P = (p, f_1(x_1),\ f_2(x_2; x_1), \ldots, f_n(x_n; x_1, \ldots, x_{n-1}))$$

ein dem Bereich entnommenes Modulsystem von folgenden Eigenschaften: p ist eine ungerade Primzahl, $f_1(x_1)$ mod p irreducibel, $f_2(x_2; x_1)$ als Function von x_2 aufgefasst (mod $p, f_1(x_1)$) irrreducibel u. s. w. Jedes f_k muss x_k, darf nicht $x_{k+1}, \ldots, x_n$ und kann $x_1, \ldots, x_{k-1}$ enthalten. Der Coefficient der höchsten Potenz von x_k in f_k sei $= 1$.

Ein solches System ist ein *Primmodulsystem des Bereichs* $\mathfrak{B}$. Diese Thatsache ist bekannt für den Fall $n = 1$. Wir schliessen weiter durch Induction und nehmen an, der Satz gelte bis hin zu $n = n-1$. Dann ist also P_{n-1}, das aus $P = P_n$ durch Tilgung von f_n entsteht, ein Primmodulsystem des Bereichs $\mathfrak{B}_{n-1} = [x_1, \ldots, x_{n-1}]$, und demnach wird es durch Adjunction irgend einer Grösse F_{n-1} dieses Bereiches, die das System nicht enthält, der 1 aequivalent, d. h. es besteht eine Gleichung

$$1 = X_0 p + X_1 f_1 + \cdots + X_{n-1} f_{n-1} + F_{n-1} G_{n-1}.$$

Das lautet mit anderen Worten: zu jeder das System P_{n-1} nicht

enthaltenden Grösse F_{n-1} giebt es eine Grösse G_{n-1} von der Beschaffenheit, dass

$$F_{n-1} G_{n-1} \equiv 1 \pmod{P_{n-1}}$$

ist.

Sind nun F und G zwei Grössen von $\mathfrak{B}$, und ist der Grad von G in x_n geringer als der oder gleich dem Grad von F, so kann ein Factor aus dem Bereiche $\mathfrak{B}_{n-1}$ so bestimmt werden, dass mod P_{n-1} der erste Coefficient von G nach Multiplication mit diesem Factor dem ersten Coefficienten von F congruent wird. Wird dann G mit diesem Factor multiplicirt von F abgezogen, so bleibt eine Function F' von geringerem Grade als F übrig. Dieser Vorgang bedeutet eine Division im Grössenbereich $\mathfrak{B}$. Aus dem Begriff der Division folgt aber der Begriff des grössten gemeinsamen Theilers und daraus für den Fall zweier theilerfremden F und G die Existenz zweier Grössen $\overline{F}$ und $\overline{G}$, die der Bedingung

$$F\overline{F} + G\overline{G} \equiv 1 \pmod{P_{n-1}}$$

genügen. Setzen wir nun f_n statt F, so ist jede Grösse G, die f_n nicht enthält, zu f_n theilerfremd und es besteht die Beziehung

$$G\overline{G} \equiv 1 \pmod{P}.$$

Das heisst aber: Das System P ist nach Adjunction irgend einer das System nicht enthaltenden Grösse der 1 aequivalent. Es ist also ein Primmodulsystem.

2. Der Grad von f_k in x_k sei m_k, dann ist die Anzahl aller mod P incongruenten Reste des Bereichs $\mathfrak{B}$

$$q = p^{m_1 \cdots m_n}.$$

Für jede Grösse $\mathfrak{a}$ des Bereichs, die 0 ausgeschlossen, gilt, wie leicht einzusehen, der *Fermat*sche Satz:

$$\mathfrak{a}^{p^{m_1 \cdots m_n} - 1} = \mathfrak{a}^{q-1} \equiv 1 \pmod{P},$$

und es lassen sich auch hier die Grössen $\mathfrak{a}$ in Gruppen theilen, je nach dem kleinsten Exponenten, mit dem potenzirt sie 1 ergeben. Ebenso folgt leicht die Richtigkeit des *Wilson*schen Satzes

$$\Pi \mathfrak{a} \equiv -1 \pmod{P},$$

wobei das Product über alle incongruenten Reste, 0 ausgeschlossen, zu erstrecken ist. —

Im Folgenden bedürfen wir nun noch einer wichtigen Verallge-

meinerung des *Fermat*schen Satzes. Jede Grösse $\mathfrak{a}_n$ des Bereichs $\mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}$ hat die Form

$$\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_{n-1} x_n^{\mu} + \mathfrak{a}'_{n-1} x_n^{\mu-1} + \cdots$$

und kann in die Gestalt

$$\mathfrak{a}_n \equiv \mathfrak{a}_{n-1} (x_n^{\mu} + \bar{\mathfrak{a}}'_{n-1} x_n^{\mu-1} + \cdots) \pmod{P}$$

gebracht werden. Es giebt, von der Null abgesehen,

$$p^{m_1 \cdots m_n} - 1 = q - 1 \text{ Grössen } \mathfrak{a}_n,$$

aber nur

$$\frac{p^{m_1 \cdots m_n} - 1}{p^{m_1 \cdots m_{n-1}} - 1} \text{ Grössen } \mathfrak{a}_n,$$

deren erster Coefficient 1 ist. Multiplicirt man nun irgend eine Grösse $\mathfrak{a}_n$ mit allen Grössen $\mathfrak{a}_n$, deren erster Coefficient 1 ist, so erhält man, abgesehen von einem Factor $\mathfrak{a}_{n-1}$, immer wieder dieselben Grössen. Multiplicirt man alle so entstandenen Congruenzen, so hebt sich das Product über alle Grössen $\mathfrak{a}$ weg, deren erster Coefficient 1 ist; und man erhält

$$\mathfrak{a}_n^{\frac{p^{m_1 \cdots m_n} - 1}{p^{m_1 \cdots m_{n-1}} - 1}} \equiv \mathfrak{a}_{n-1} \pmod{P},$$

wobei $\mathfrak{a}_{n-1}$ wieder eine Grösse von $\mathfrak{B}_{n-1}$ bezeichnen soll. Entsprechend wird

$$\mathfrak{a}_{n-1}^{\frac{p^{m_1 \cdots m_{n-1}} - 1}{p^{m_1 \cdots m_{n-2}} - 1}} \equiv \mathfrak{a}_{n-2},$$

wobei $\mathfrak{a}_{n-2}$ eine Grösse von $\mathfrak{B}_{n-2} = [x_1, \ldots, x_{n-2}]$ ist. Allgemein folgt

$$\mathfrak{a}_n^{\frac{p^{m_1 \cdots m_n} - 1}{p^{m_1 \cdots m_k} - 1}} \equiv \mathfrak{a}_k,$$

und $\mathfrak{a}_k$ gehört dem Bereich $\mathfrak{B}_k = [x_1, \ldots, x_k]$ an. D. h.:

Jede Grösse des Bereichs $\mathfrak{B}_n$, erhoben zur Potenz

$$\frac{p^{m_1 \cdots m_n} - 1}{p^{m_1 \cdots m_k} - 1}$$

ist (mod P) einer Grösse des Bereichs $\mathfrak{B}_k$ congruent.

3. Durch Hinzufügung einer neuen Unbestimmten x erweitern wir den Bereich $\mathfrak{B} = [x_1, \ldots, x_n]$ zum Bereich $B = [\mathfrak{B}, x] = [x_1, \ldots, x_n, x]$, und es seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei Grössen dieses Bereiches, die mod P irreducibel seien. Die nicht angedeuteten Coefficienten sind Grössen des Bereichs $\mathfrak{B}$, der erste Coefficient sei $= 1$. Der Grad von f in x sei μ und der von g ν.

Dann ist nach dem eben bewiesenen Satze:

$$g^{\frac{q^\mu-1}{q-1}} \equiv \mathfrak{g} \pmod{P, f},$$

$$f^{\frac{q^\nu-1}{q-1}} \equiv \mathfrak{f} \pmod{P, g},$$

und dabei sind $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ Grössen des Bereichs $\mathfrak{B}$.

Die Beziehung zwischen $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ bildet den Kern dieser Arbeit.

Es seien $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... alle (mod P, f) incongruenten Grössen des Bereichs B, deren erster Coefficient 1 sei; das gleiche bedeuten $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ... für das System (P, g). Wir bilden alle Producte $\varphi_i g$ und dividiren sie mod P durch f, so gelangen wir zu Congruenzen

$$\varphi_i(x)\, g(x) \equiv \chi_i f(x) + \overline{r}_i(x)$$

oder

$$\varphi_i g \equiv \chi_i f + \mathfrak{r}_i r_i \pmod{P}.$$

$\mathfrak{r}$ ist eine Grösse von $\mathfrak{B}$ und alle φ_i, χ_i, r_i haben als ersten Coefficienten 1. In diesen Congruenzen, deren es $\frac{q^\mu-1}{q-1}$ giebt, können nicht zwei r_i einander congruent sein, denn aus $r_i \equiv r_k$ würde

$$\mathfrak{r}_k \varphi_i g \equiv \mathfrak{r}_i \varphi_k g$$

und daraus

$$\mathfrak{r}_k \equiv \mathfrak{r}_i, \quad \varphi_k \equiv \varphi_i \pmod{P}$$

folgen. Die Gesammtheit der Grössen r stimmt demnach mit der Gesammtheit der Grössen φ überein. Also heben sich in der durch Multiplication sämmtlicher Congruenzen entstehenden Congruenz

$$\prod_i (\varphi_i g) \equiv \prod_i (\mathfrak{r}_i r_i) \pmod{P, f}$$

die φ und die r weg und man erhält

$$g^{\frac{q^\mu-1}{q-1}} \equiv \prod_i \mathfrak{r}_i \pmod{P, f}$$

oder

$$\mathfrak{g} \equiv \prod_i \mathfrak{r}_i \pmod{P}.$$

Es seien jetzt

$$\mu \quad \nu \quad \sigma \quad \tau \quad \varrho$$

die Grade von

$$f \quad g \quad \varphi \quad \chi \quad r$$

in x, und $\mu > \nu$.

Aus der Congruenz $\varphi g \equiv \chi f + \mathfrak{r} r$ folgt:

Ist $\sigma = 0, \ldots, \mu-\nu-1$, so ist stets $\chi = 0$,
„ $\sigma = \mu-\nu$ „ „ „ $\chi = 1$, $\tau = 0$,
„ $\sigma = \mu-\nu+1$ „ „ „ $\tau = 1$,
. . . . . .
„ $\sigma = \mu-1$ „ „ „ $\tau = \nu-1$.

In den Fällen $\sigma = 0, \ldots, \mu-\nu-1$ ist $\varrho = \sigma+\nu$ und $\mathfrak{r} = 1$, in allen übrigen Fällen $\sigma \geqq \mu-\nu$ ist ϱ eine der Zahlen $\mu-1, \ldots, 0$. Für den besonderen Fall $\mu = \nu$ fällt nur die erste Gruppe weg, und da diese Gruppe wegen der Werthe $\mathfrak{r} = 1$, wie man später sehen wird, überhaupt nicht in Betracht kommt, so enthält die Annahme $\mu > \nu$ keine Einschränkung.

Es sei

$$f \equiv x^\mu + \mathfrak{a}_1 x^{\mu-1} + \cdots,$$
$$g \equiv x^\nu + \mathfrak{b}_1 x^{\nu-1} + \cdots,$$
$$\varphi \equiv x^\sigma + \mathfrak{c}_1 x^{\sigma-1} + \cdots,$$
$$\chi \equiv x^\tau + \mathfrak{e}_1 x^{\tau-1} + \cdots \pmod P.$$

Dividirt man φg durch f, so kommen für die Werthe der Coefficienten von χ allein die Coefficienten der Potenzen $x^{\nu+\sigma}, \ldots, x^\mu$ des Productes φg in Betracht. In diesen kommen aber nur die

$$\nu + \sigma - (\mu - 1) = \tau + 1$$

ersten Coefficienten von φ, d. h. die Grössen $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_\tau$ vor. Durch sie sind also die Grössen $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_\tau$ bestimmt. $\mathfrak{r}$ hängt linear von dem Coefficienten von $x^{\mu-1}$ des Productes φg und dieser wieder linear von $\mathfrak{c}_{\tau+1}$ ab; es ist $\mathfrak{r} \equiv \mathfrak{c}_{\tau+1} + \mathfrak{A}(\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_\tau)$, wobei $\mathfrak{A}$ einen Ausdruck andeuten soll, der von den eingeklammerten Grössen und ausserdem noch von den $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ abhängt. Von den Grössen $\mathfrak{c}_{\tau+2}, \ldots, \mathfrak{c}_\sigma$ hängt $\mathfrak{r}$ nicht ab. Halten wir jetzt einen bestimmten Grad σ und ein Werthsystem $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_\tau, \mathfrak{c}_{\tau+2}, \ldots, \mathfrak{c}_\sigma$ fest und lassen $\mathfrak{c}_{\tau+1}$ ein vollständiges Restsystem mod P durchlaufen, so durchläuft $\mathfrak{r}$ ebenfalls ein vollständiges Restsystem. Da es nun $q^{\sigma-1}$ Werthsysteme $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_\tau, \mathfrak{c}_{\tau+2}, \ldots, \mathfrak{c}_\sigma$ giebt, und alle diese im Verein mit allen Werthen von $\mathfrak{c}_\tau$ alle möglichen φ von demselben Grade σ erzeugen, so kommt bei festem σ jeder Werth $\mathfrak{r}$ $q^{\sigma-1}$-mal vor. Demnach giebt es für jedes $\mathfrak{r}$, 0 ausgeschlossen, $q^{\sigma-1}$ Functionen r vom Grade $\varrho = \mu-1$.

Die Werthe $\mathfrak{r} = 0$ ergeben Functionen r von geringerem Grade. Bezeichnet nun wieder $\mathfrak{r}$ den Coefficienten der höchsten Potenz $x^{\mu-2}$, so hängt

$\mathfrak{r}$ linear von $\mathfrak{c}_{\tau+2}$ ab. $\mathfrak{c}_{\tau+1}$ ist in diesem Fall durch die vorhergehenden $\mathfrak{c}$ schon bestimmt; demnach sind für $\mathfrak{r}$ nur die Grössen $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_\tau, \mathfrak{c}_{\tau+2}, \ldots, \mathfrak{c}_\sigma$ variabel. Für jedes Werthsystem $\mathfrak{c}_1, \ldots \mathfrak{c}_\tau, \mathfrak{c}_{\tau+3}, \ldots, \mathfrak{c}_\sigma$ durchläuft $\mathfrak{r}$ ein vollständiges Restsystem mod P, wenn $\mathfrak{c}_{\tau+2}$ das thut, also kommt jeder Werth $\mathfrak{r}$ $q^{\sigma-2}$-mal vor. So schliesst man weiter und findet: Bei festem σ kommt jeder Werth $\mathfrak{r}$, 0 ausgeschlossen, für alle φ

$q^{\sigma-1}$-mal vor mit Functionen r vom Grade $\varrho = \mu-1$,
$q^{\sigma-2}$-mal „ „ „ „ „ $\varrho = \mu-2$,
. . . . . .
q^{τ}-mal „ „ „ „ „ $\varrho = \mu-(\sigma-\tau) = \nu$.

Ausserdem ergeben sich noch q^τ weitere Functionen r, deren Grad $\varrho < \nu$ ist, über deren $\mathfrak{r}$ nichts ausgesagt werden kann. Diese $\mathfrak{r}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{r}_k$.

Die Productbildung bei

$$\mathfrak{g} \equiv \prod_i \mathfrak{r}_i$$

bezog sich auf alle φ. Für $\sigma = 0, \ldots, \mu-\nu-1$ sind die $\mathfrak{r} = 1$; sie fallen aus dem Product weg. Für $\sigma > \mu-\nu-1$ kommt jeder Werth $\mathfrak{r}$ gleich oft und zwar $(q^{\sigma-1} + \cdots + q^\tau)$-mal vor und demnach ist nach dem *Wilson*schen Satze das Product über alle diese $\mathfrak{r}$

$$(-1)^{q^{\sigma-1}+\cdots+q^\tau} = (-1)^{\sigma-\tau} = (-1)^{\mu-\nu},$$

und das gilt für die Fälle $\sigma = \mu-\nu, \ldots, \mu-1$; also ergiebt sich

$$\mathfrak{g} \equiv (-1)^{(\mu-\nu)\nu} \prod_k \mathfrak{r}_k.$$

4. Kehren wir jetzt das Verhältniss um, so gelangen wir zu einer Reihe von Congruenzen

$$\psi_k f \equiv \chi'_k g + \mathfrak{r}'_k r'_k \pmod{P}.$$

Ihre Anzahl ist $\frac{q^\nu-1}{q-1}$, und da die Anzahl der in der vorigen Nummer enthaltenen Congruenzen, über deren $\mathfrak{r}$ nichts ausgesagt werden konnte,

$$\sum_{\tau=0}^{\nu-1} q^\tau = \frac{q^\nu-1}{q-1}$$

beträgt, sind beide Anzahlen gleich. Thatsächlich stimmen aber auch die Congruenzen

$$\psi_k f \equiv \chi'_k g + \mathfrak{r}'_k r'_k$$

mit den Congruenzen

$$\varphi_k g \equiv \chi_k f + \mathfrak{r}_k r_k$$

überein, denn der Grad χ_k ist $< \nu$, also gehören die χ_k zur Reihe der ψ_k. Es können aber auch nicht zwei χ_k einander congruent sein, denn daraus würde

$$(\varphi_k - \overline{\varphi_k}) g \equiv \mathfrak{r} r_k - \overline{\mathfrak{r}}\,\overline{r_k},$$

und da der Grad von $r_k < \nu$ war, weiter

$$\varphi_k \equiv \overline{\varphi_k}, \quad \mathfrak{r}_k \equiv \overline{\mathfrak{r}_k}, \quad r_k \equiv \overline{r_k}$$

folgen. Also stimmt die Reihe der χ_k überein mit der Reihe der ψ_k und entsprechend die Reihe der χ'_k mit der Reihe der φ_k. Demnach haben wir bei geeigneter Zuordnung

$$\psi_k f \equiv \varphi_k g + \mathfrak{r}'_k r_k; \qquad \varphi_k g \equiv \psi_k f + \mathfrak{r}_k r_k.$$

Daraus folgt

$$\mathfrak{r}'_k \equiv -\mathfrak{r}_k.$$

Multipliciren wir nun wieder die sämmtlichen Congruenzen

$$\psi_k f \equiv \varphi_k g + \mathfrak{r}'_k r_k,$$

so kommt

$$f^{\frac{q^\nu - 1}{q-1}} \equiv \prod_k \mathfrak{r}'_k \equiv (-1)^{\frac{q^\nu - 1}{q-1}} \prod_k \mathfrak{r}_k \pmod{P, g},$$

also

$$\mathfrak{f} \equiv (-1)^\nu \prod_k \mathfrak{r}_k \pmod{P}.$$

Der Vergleich mit der vorigen Nummer liefert

$$\mathfrak{g} \equiv (-1)^{\mu\nu} \mathfrak{f} \pmod{P}.$$

Das ist die Wechselbeziehung zwischen den Functionen f und g. Aus ihr sollen nun Folgerungen über die Reciprocitätsgesetze gezogen werden.

5. Wir behandeln nur zwei Fälle. Zunächst sei τ ein Theiler von $q-1$, dann ist es auch Theiler von $q^\mu - 1$ und $q^\nu - 1$, und es entsteht die Frage nach der Reciprocität zwischen dem Charakter von g als τ-ter Potenzrest (mod P, f) und dem von f (mod P, g). Da $q - 1 \equiv 0 \bmod \tau$ ist, ist die Congruenz

$$v^\tau \equiv 1 \pmod{P}$$

noch durch andere Werthe als $v = 1$ löslich. Es sei $\mathfrak{a}$ eine zum Exponenten τ gehörige Grösse des Bereichs $\mathfrak{B}$, so ist

$$v^\tau - 1 \equiv (v - \mathfrak{a})(v - \mathfrak{a}^2) \cdots\cdots (v - \mathfrak{a}^\tau) \pmod{P}.$$

Adjungiren wir nun dem Bereich $\mathfrak{B}$ die Unbestimmte v, so entsteht ein Bereich

$$\mathfrak{V} = [\mathfrak{B}, v] = [x_1, \ldots, x_n, v].$$

In diesem ist das System

$$(P, v - \mathfrak{a})$$

ein Primmodulsystem, hinsichtlich dessen

$$v^\tau - 1 \equiv 0$$

ist.

Es sind aber f und g (mod $P, v-\mathfrak{a}$) irreducibel, und demnach die Systeme

$$(P, v-\mathfrak{a}, f), \qquad (P, v-\mathfrak{a}, g),$$

die dem Bereich $V = [B, v] = [\mathfrak{V}, x] = [\mathfrak{B}, v, x] = [x_1, \ldots, x_n, v, x]$ angehören, prim.

Nun ist nach dem *Fermat*schen Satz

$$g^{q^\mu - 1} \equiv 1 \pmod{P, v-\mathfrak{a}, f}.$$

Daraus folgt

$$\left(g^{\frac{q^\mu - 1}{\tau}}\right)^\tau - 1 \equiv 0 \pmod{P, v-\mathfrak{a}, f}.$$

Da aber

$$\left(g^{\frac{q^\mu - 1}{\tau}}\right)^\tau - 1 \equiv \prod_{\sigma=0}^{\tau-1} \left(g^{\frac{q^\mu - 1}{\tau}} - v^\sigma\right) \pmod{v^\tau - 1}$$

also auch (mod $P, v-\mathfrak{a}, f$) ist, und dieses System prim ist, so muss

$$g^{\frac{q^\mu - 1}{\tau}} \equiv v^\sigma \pmod{P, v-\mathfrak{a}, f}$$

sein. Entsprechend folgt

$$f^{\frac{q^\nu - 1}{\tau}} \equiv v^\varrho \pmod{P, v-\mathfrak{a}, g}.$$

Die Potenzen von v können zur Bezeichnung des Charakters einer Function als τ-ter Potenzrest gebraucht werden. Wir setzen

$$v^\sigma = \left(\frac{g}{P, v-\mathfrak{a}, f}\right)_\tau, \qquad v^\varrho = \left(\frac{f}{P, v-\mathfrak{a}, g}\right)_\tau.$$

Es handelt sich jetzt um eine Beziehung zwischen diesen beiden Symbolen. Es ist

$$v^\sigma \equiv g^{\frac{q^\mu - 1}{q-1} \cdot \frac{q-1}{\tau}} \equiv \mathfrak{g}^{\frac{q-1}{\tau}} \equiv (-1)^{\mu\nu \frac{q-1}{\tau}} \mathfrak{f}^{\frac{q-1}{\tau}} \pmod{P, v-\mathfrak{a}, f}$$

und

$$v^\varrho \equiv f^{\frac{q^\nu - 1}{q-1} \cdot \frac{q-1}{\tau}} \equiv \mathfrak{f}^{\frac{q-1}{\tau}} \pmod{P, v-\mathfrak{a}, g}.$$

Also lautet das ***Reciprocitätsgesetz für die τ-ten Potenzreste:***

$$\left(\frac{g}{P, v-\mathfrak{a}, f}\right)_\tau = \left(\frac{f}{P, v-\mathfrak{a}, g}\right)_\tau (-1)^{\mu\nu\frac{q-1}{\tau}}.$$

Betrachten wir die besonderen Fälle $\tau \not\equiv 0 \pmod 2$ und $\tau = 2$.

Im ersten Fall ist stets

$$\frac{q-1}{\tau} \equiv 0 \pmod 2,$$

also haben wir

$$\left(\frac{g}{P, v-\mathfrak{a}, f}\right)_\tau = \left(\frac{f}{P, v-\mathfrak{a}, g}\right)_\tau \qquad \begin{pmatrix} q-1 \equiv 0 \pmod\tau \\ \tau \not\equiv 0 \pmod 2 \end{pmatrix}.$$

Für $\tau = 2$ wird $\frac{q-1}{2} \equiv m_1 m_2 \ldots m_n \frac{p-1}{2} \pmod 2$ und $\mathfrak{a} = -1$, also

$$\left(\frac{g}{P, f}\right) = \left(\frac{f}{P, g}\right)(-1)^{\mu\nu m_1 \ldots m_n \frac{p-1}{2}}$$

d. h.:

> Nur wenn alle vorkommenden Grade $\mu, \nu, m_1, \ldots, m_n$ ungerade sind und p die Gestalt $4n-1$ hat, ist der quadratische Restcharakter von $g \pmod{P, f}$ verschieden von dem quadratischen Restcharakter von $f \pmod{P, g}$.

6. Wenn τ kein Theiler von $q-1$ ist, so treten nur in den Fällen $\tau = 3, 4$ einfache Gesetze ein. Das rührt, wie in der gewöhnlichen Zahlenlehre daher, dass aus der Zerlegbarkeit von v^2+v+1 oder $v^2+1 \pmod{P, f}$ auch eine Zerlegung von $f \pmod{P, v^2+v+1}$ oder v^2+1) folgt.

Die Rechnung soll nur für den Fall $\tau = 3$ durchgeführt werden. Der Fall $\tau = 4$ bietet dann sachlich nichts Neues.

Es soll also 3 kein Theiler von $q-1$ sein, dann muss $q \equiv -1 \pmod 3$ sein, also sind alle $m_1, \ldots, m_n$ ungerade und p von der Form $6n-1$. Die Congruenz

$$v^2 + v + 1 \equiv 0 \pmod P$$

ist nicht löslich, und da sie in

$$(2v+1)^2 \equiv -3$$

umgeformt werden kann, ist -3 quadratischer Nichtrest $\pmod P$. Hingegen soll $\pmod{P, f}$ die Congruenz löslich sein, also ist -3 quadratischer Rest für dieses System und $q^\mu - 1 \equiv 0 \pmod 3$, also μ gerade.

Es giebt also eine Grösse c des Bereichs B, welche die Congruenz

$$c^2 + c + 1 \equiv 0 \pmod{P, f}$$

und damit die Congruenz

$$c^2 + c + 1 \equiv r f \pmod{P}$$

erfüllt. Wir wollen beweisen, dass daraus die Existenz zweier Grössen a, b folgt von der Eigenschaft

$$a^2 + ab + b^2 \equiv f \pmod{P}.$$

Es sei b vorläufig noch unbestimmt und $a \equiv bc \pmod{P, f}$, also $a \equiv bc - sf \pmod{P}$, so wird

$$a^2 + ab + b^2 \equiv b^2(c^2 + c + 1) - 2bcsf - bsf + s^2f^2.$$

Die Bestimmung von a und b mit der genannten Eigenschaft ist also dann möglich, wenn es möglich ist, die Grössen b und s der Bedingung

$$fs^2 - (2c + 1)sb + rb^2 \equiv 1 \pmod{P}$$

oder

$$f(2s)^2 - 2(2c+1)\ 2sb + 4rb^2 \equiv 4 \pmod{P}$$

gemäss zu bestimmen. D. h. wenn die Zahl 4 (mod P) durch die quadratische Form $(f, -(2c+1), 4r)$ darstellbar ist, so giebt es zwei Grössen $2s$ und b und damit auch a und b von der verlangten Eigenschaft. Die Form hat die Discriminante -3. Entsprechend der Theorie der quadratischen Formen des gewöhnlichen Zahlenbereichs kann man auch für den Bereich B hinsichtlich des Systems P eine Theorie der quadratischen Formen bilden. Ich gedenke darüber in Zukunft genauere Untersuchungen zu veröffentlichen und begnüge mich daher hier mit der Angabe, dass alle Formen der Discriminante -3 entweder der einen reducirten Form $(1, 0, 3)$ oder einer der beiden Formen $(1, 0, 3)$ und $(\mathfrak{n}_1, 0, \mathfrak{n}_2)$ aequivalent sind, je nachdem -1 quadratischer Rest oder Nichtrest mod P ist; $\mathfrak{n}_1$ und $\mathfrak{n}_2$ sind quadratische Nichtreste. Dass 4 durch die erste der beiden Formen dargestellt werden kann, ist klar; es fragt sich, ob auch durch die zweite. Das ist nur dann nicht möglich, wenn für alle Grössen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ der Ausdruck $\mathfrak{n}_1\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{n}_2\mathfrak{y}^2$ einem Nichtrest congruent ist. Dann muss aber stets die Summe zweier Nichtreste wieder einen Nichtrest ergeben. Das ist nur dann möglich, wenn der Ausdruck einmal $\equiv 0$ wird. Dann müsste aber -1 quadratischer Rest sein, und in diesem Fall existirt nur die eine reducirte Form $(1, 0, 3)$. Also muss der Ausdruck $\mathfrak{n}_1\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{n}_2\mathfrak{y}^2$ einem Rest congruent sein, und damit muss es eine Darstellung von 4 durch die Form $(\mathfrak{n}_1, 0, \mathfrak{n}_2)$ geben. Wir sehen

also: es giebt stets zwei Grössen $2s$ und b und damit auch a und b. Somit haben wir den Satz:

Wenn $q \equiv -1 \pmod 3$, aber μ gerade ist, so giebt es stets zwei Grössen a und b, für die

$$a^2 + ab + b^2 \equiv f \pmod P$$

ist.

Da nun aber

$$a^2 + ab + b^2 \equiv (a - bv)(a - bv^2) \pmod{v^2 + v + 1}$$

ist, so folgt daraus weiter

$$f \equiv (a - bv)(a - bv^2) \pmod{P, v^2 + v + 1}.$$

Durch Multiplication mit geeigneten Factoren des Bereichs $\mathfrak{B}$ können noch die Coefficienten der höchsten Potenzen in x in den beiden Factoren $= 1$ gemacht werden. Bezeichnen wir unter diesen Umständen die Factoren mit f_1 und f_2, so haben wir damit den Eingangs dieser Nummer angegebenen Satz bewiesen:

> Ist $(P, v^2 + v + 1)$ ein Primmodulsystem, ist aber $v^2 + v + 1 \pmod{P, f}$ zerlegbar, so ist auch $f \pmod{P, v^2 + v + 1}$ in zwei Factoren zerlegbar.

Wie man leicht sieht, sind f_1 und $f_2 \pmod{P, v^2 + v + 1}$ irreducibel; beide haben den Grad $\frac{\mu}{2}$.

7. Wir kommen zum Reciprocitätsgesetz für die kubischen Reste und unterscheiden die Fälle:

1. μ, ν ungerade, also f, g irreducibel;
2. μ gerade, ν ungerade, also $f \equiv f_1 f_2$, g irreducibel;
3. μ, ν gerade, also $f \equiv f_1 f_2$, $g \equiv g_1 g_2 \pmod{P, v^2 + v + 1}$.

1. Nach dem *Fermat*schen Satz ist

$$g^{q^2\mu - 1} \equiv 1 \pmod{P, v^2 + v + 1, f},$$

also

$$g^{\frac{q^2\mu - 1}{3}} \equiv v^\sigma = \left(\frac{g}{P, v^2 + v + 1, f}\right)_3 \pmod{P, v^2 + v + 1, f}.$$

Entsprechend

$$f^{\frac{q^2\nu - 1}{3}} \equiv v^\varrho = \left(\frac{f}{P, v^2 + v + 1, g}\right)_3 \pmod{P, v^2 + v + 1, g}.$$

Nun ist

$$v^\sigma \equiv g^{\frac{q^{2\mu}-1}{3}} \equiv g^{\frac{q^{2\mu}-1}{q^2-1}\cdot\frac{q^2-1}{3}} \equiv \mathfrak{g}(v)^{\frac{q^2-1}{3}} \pmod{P, v^2+v+1, f},$$

also

$$v^\sigma \equiv \mathfrak{g}(v)^{\frac{q^2-1}{3}} \pmod{P, v^2+v+1}$$

und ebenso

$$v^\varrho \equiv \mathfrak{f}(v)^{\frac{q^2-1}{3}} \pmod{P, v^2+v+1}.$$

Diese Congruenzen sind Anwendungen des Satzes der Nr. 2. Für den Bereich $\mathfrak{B}$ ist hier $\mathfrak{V}$ getreten, was durch das eingeklammerte v angedeutet ist; demnach musste auch q^2 für q gesetzt werden. Aus Nr. 4 folgt dann

$$v^\sigma \equiv (-1)^{\mu\nu\frac{q^2-1}{3}} v^\varrho \pmod{P, v^2+v+1}.$$

Nun ist aber stets $\frac{q^2-1}{3} \equiv 0 \pmod 2$, also folgt $v^\sigma = v^\varrho$, d. h.

$$\left(\frac{g}{P, v^2+v+1, f}\right)_3 = \left(\frac{f}{P, v^2+v+1, g}\right)_3.$$

2. Da f_1 den Grad $\frac{\mu}{2}$ hat, wird

$$g^{q^\mu-1} \equiv 1 \pmod{P, v^2+v+1, f_1}$$

und daraus

$$g^{\frac{q^\mu-1}{3}} \equiv v^\sigma \pmod{P, v^2+v+1, f_1}.$$

Wie vorher ist aber

$$f_1^{\frac{q^{2\nu}-1}{3}} \equiv v^\varrho \pmod{P, v^2+v+1, g}.$$

Es ist wieder

$$v^\sigma \equiv g^{\frac{q^\mu-1}{3}} \equiv g^{\frac{q^\mu-1}{q^2-1}\cdot\frac{q^2-1}{3}} \equiv \mathfrak{g}(v)^{\frac{q^2-1}{3}} \pmod{P, v^2+v+1, f_1}$$

und

$$v^\varrho \equiv f_1^{\frac{q^{2\nu}-1}{3}} \equiv f_1^{\frac{q^{2\nu}-1}{q^2-1}\cdot\frac{q^2-1}{3}} \equiv \mathfrak{f}_1(v)^{\frac{q^2-1}{3}} \pmod{P, v^2+v+1, g},$$

und daraus folgt wie im Fall 1:

$$\left(\frac{g}{P, v^2+v+1, f_1}\right)_3 = \left(\frac{f}{P, v^2+v+1, g}\right)_3.$$

3. Hier ist

$$g_1^{\frac{q^\mu - 1}{3}} \equiv v^\sigma \pmod{P, v^2 + v + 1, f_1},$$

$$f_1^{\frac{q^\nu - 1}{3}} \equiv v^\varrho \pmod{P, v^2 + v + 1, g_1}.$$

Man findet wie in den beiden ersten Fällen

$$\left(\frac{g_1}{P, v^2 + v + 1, f_1}\right)_3 = \left(\frac{f_1}{P, v^2 + v + 1, g_1}\right)_3.$$

Dieser Einblick in die Theorie der kubischen Reste möge genügen.

8. Die Theorie der biquadratischen Reste ist ganz ähnlich. Auch hier folgt aus der Zerlegbarkeit von $v^2 + 1 \pmod{P, f}$ die Darstellung

$$f \equiv a^2 + b^2 \equiv (a + bv)(a - bv) \equiv f_1 f_2 \pmod{P, v^2 + 1},$$

wenn μ gerade ist. Auch hier ergiebt sich in den drei behandelten Fällen die Gleichheit der Symbole.

Beiträge zur Theorie der einer linearen Differentialgleichung $n$ter Ordnung adjungirten Differentialgleichungen.

(Von Herrn *E. Grünfeld* in Wien.)

1.

Wenn die n linearunabhängigen Integrale $y_1, y_2, \ldots, y_n$ der linearen Differentialgleichung

$$(1.) \qquad P(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n y = 0$$

mit den in x rationalen Coefficienten p_i in der Umgebung eines singulären Punktes $x = a$ beziehungsweise zu den Exponenten $r_1, r_2, \ldots, r_n$ gehören, so gehören die Integrale

$$(2.) \qquad z_i = (-1)^{i-1} \frac{D(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n)}{D(y_1, y_2, , \ldots, y_n)}$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$ der $n$ten Adjungirten von (1.):

$$(3.) \qquad P_1(z) = \frac{d^n z}{dx^n} - \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(p_1 z) + \cdots + (-1)^n p_n z = 0$$

bez. zu den Exponenten

$$(4.) \qquad -r_1 + n - 1, \; -r_2 + n - 1, \; \ldots, \; -r_n + n - 1$$

und die Integrale

$$(5.) \qquad u_{(k)_i} = p_{n-k} z_i - \frac{d}{dx}(p_{n-k-1} z_i) + \cdots + (-1)^{n-k} \frac{d^{n-k} z_i}{dx^{n-k}}$$

der $k$ten Adjungirten von (1.):

$$Q_k(u_{(k)}) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

bez. zu den Exponenten

$$(6.) \qquad -r_1+k-1,\ -r_2+k-1,\ \ldots,\ -r_n+k-1$$

(d. J. Bd. 117, S. 276).

Dies gilt, solange der singuläre Punkt $x = a$ im Endlichen liegt. Um aber auch die Beziehungen zu ermitteln, die zwischen den Wurzeln der auf den Punkt $x = \infty$ bezüglichen determinirenden Fundamentalgleichungen von $P(y) = 0$ einerseits und $P_1(z) = 0$, $Q_k(u_{(k)}) = 0$ andererseits stattfinden, werde $x^{-1} = t$ gesetzt: Es ist dann:

$$(7.) \quad \begin{cases} \dfrac{d^\lambda y}{dx^\lambda} = (-1)^\lambda \left\{ t^{2\lambda} \dfrac{d^\lambda y}{dt^\lambda} + k_1 t^{2\lambda-1} \dfrac{d^{\lambda-1} y}{dt^{\lambda-1}} + k_2 t^{2\lambda-2} \dfrac{d^{\lambda-2} y}{dt^{\lambda-2}} \right. \\ \qquad\qquad \left. + \cdots + k_{\lambda-2} t^{\lambda+2} \dfrac{d^2 y}{dt^2} + k_{\lambda-1} t^{\lambda+1} \dfrac{dy}{dt} \right\} \end{cases}$$

($\lambda = 1, 2, 3, \ldots$), wo $k_1, k_2, \ldots, k_{\lambda-1}$ ganz bestimmte, numerische Constanten bedeuten. Sind nun $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ die Wurzeln, zu denen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ in der Umgebung des Punktes $x = \infty, t = 0$ gehören, so ergiebt sich, wenn man die in den Determinanten von (2.) vorkommenden Ableitungen dieser Integrale mittelst der Formel (7.) transformirt, dass in derselben Umgebung die $z_1, z_2, \ldots, z_n$ zu den Exponenten: $-\varrho_1-n+1,\ -\varrho_2-n+1,\ \ldots,\ -\varrho_n-n+1$ gehören. (Vergl. *Thomé*, d. J. Bd. 83, S. 138).

Die zwischen den n Adjungirten $u_{(1)}, u_{(2)}, \ldots, u_{(n-1)}, u_{(n)} = z$ stattfindenden Beziehungen (d. J. Bd. 117):

$$(8.) \quad \begin{cases} \dfrac{du_{(1)}}{dx} = p_n z,\ \dfrac{du_{(2)}}{dx} = p_{n-1} z - u_{(1)},\ \dfrac{du_{(3)}}{dx} = p_{n-2} z - u_{(2)},\ \ldots, \\ \qquad\qquad \dfrac{du_{(n)}}{dx} = p_1 z - u_{(n-1)} \end{cases}$$

verwandeln sich durch die Substitution $x^{-1} = t$, wenn von der ersten abgesehen und die übrigen in umgekehrter Reihenfolge geschrieben werden, in die folgenden:

$$(8.)' \quad \begin{cases} u_{(n-1)} = p_1 z + t^2 \dfrac{dz}{dt},\ u_{(n-2)} = p_2 z + t^2 \dfrac{du_{(n-1)}}{dt},\ \ldots, \\ \qquad\qquad u_{(2)} = p_{n-2} z + t^2 \dfrac{du_{(3)}}{dt},\ u_{(1)} = p_{n-1} z + t^2 \dfrac{du_{(2)}}{dt}. \end{cases}$$

Nach den von Herrn *Fuchs* herrührenden Sätzen über die „wie F be-

schaffenen Functionen“ (d. J. Bd. 66, S. 155) folgt aus den Gleichungen (8.)′, dass, wenn z in der Umgebung von $t = 0$ zum Exponenten σ gehört, in derselben Umgebung die übrigen Adjungirten $u_{(n-1)}, u_{(n-2)}, \ldots, u_{(2)}, u_{(1)}$ beziehungsweise zu den Exponenten $\sigma+1, \sigma+2, \ldots, \sigma+n-2, \sigma+n-1$ gehören. Mit Bezug auf das frühere Ergebniss gilt daher der Satz:

> Sind $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ die Wurzeln der auf den Punkt $x = \infty$ bezüglichen determinirenden Fundamentalgleichung von $P(y) = 0$, so sind
>
> (6.)′ $\quad -\varrho_1 - k + 1, \; -\varrho_2 - k + 1, \; \ldots, \; -\varrho_n - k + 1$
>
> die Wurzeln der auf denselben Punkt bezüglichen determinirenden Fundamentalgleichung, die zur Differentialgleichung der $k$ten Adjungirten $Q_k(u_{(k)}) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ gehört.

Dieses Ergebniss kann übrigens unmittelbar aus den Definitionsformeln für die

$$(9.) \qquad u_{(k)_i} = \frac{1}{D_n} \frac{\partial D_n}{\partial y_i^{(k-1)}} \qquad (k = 1, \ldots, n; \; i = 1, \ldots, n)$$

(d. J. Bd. 115, S. 329) abgeleitet werden, wenn man in denselben die Differentialquotienten $\frac{d^\lambda y_i}{dx^\lambda}$ mittelst der Formel (7.) transformirt und hierauf für die Integrale $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ihre zu den Exponenten $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ gehörigen Werthe einsetzt. Desgleichen lässt sich auch das Ergebniss (6.) unabhängig von dem in (4.) und dem Gleichungssysteme (8.) (S. d. J. Bd. 117, S. 276) aus den Formeln (9.) herleiten, sobald für die y_i ihre zu den Exponenten r_i gehörigen Werthe substituirt werden.

2.

Der in der *Lagrange*schen Beziehung

$$(10.) \qquad z P(y) + (-1)^{n-1} y P_1(z) = \frac{d}{dx} P(y, z)$$

vorkommende bilineare Differentialausdruck $P(y, z)$ ist bekanntlich (d. J. Bd. 115) in der Form darstellbar:

$$(11.) \quad P(y, z) = u_{(n)} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + u_{(n-1)} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + u_{(2)} \frac{dy}{dx} + u_{(1)} y.$$

Gehört das Element y_i in der Umgebung eines im Endlichen liegenden Punktes $x = a$ zum Exponenten r_i, so gehören seine Ableitungen y_i', y_i'',

$\ldots, y_i^{(n-2)}, y_i^{(n-1)}$ zu den Exponenten $r_i-1, r_i-2, \ldots, r_i-n+2, r_i-n+1$ und nach der vorigen No. $u_{(1)_i}, u_{(2)_i}, \ldots, u_{(n-1)_i}, u_{(n)_i} = z_i$ zu den Exponenten $-r_i, -r_i+1, \ldots, -r_i+n-2, -r_i+n-1$; daher gehört jedes der Producte auf der rechten Seite in (11.), wenn daselbst für y und $u_{(k)}$ beziehungsweise y_i und $u_{(k)_i}$ gesetzt werden, und somit auch der ganze Ausdruck $P(y_i, z_i)$ in derselben Umgebung zum Exponenten Null.

Gehört ferner y_i in der Umgebung des Punktes $x = \infty, t = 0$ zum Exponenten ϱ_i, so gehört gemäss Formel (7.) $\frac{d^\lambda y}{dx^\lambda}$ in dieser Umgebung zum Exponenten $\varrho_i+\lambda$, also gehören $y_i', y_i'', \ldots, y_i^{(n-2)}, y_i^{(n-1)}$ zu den Exponenten $\varrho_i+1, \varrho_i+2, \ldots, \varrho_i+n-2, \varrho_i+n-1$, und da gemäss (6.)' $u_{(1)_i}, u_{(2)_i}, \ldots, u_{(n-1)_i}, u_{(n)_i}$ zu den Exponenten $-\varrho_i, -\varrho_i-1, \ldots, -\varrho_i-n+2, -\varrho_i-n+1$ in der Umgebung von $x = \infty$ gehören, so gehört auch in dieser Umgebung jedes Glied in $P(y_i, z_i)$, somit $P(y_i, z_i)$ selbst zum Exponenten Null.

Hieraus folgt der Satz:

Der bilineare Differentialausdruck

$$P(y, z) = z\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \left(p_1 z - \frac{dz}{dx}\right)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \left(p_2 z - \frac{d}{dx}(p_1 z) + \frac{d^2 z}{dx^2}\right)\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} + \cdots$$
$$\cdots + \left(p_{n-1} z - \frac{d}{dx}(p_{n-2} z) + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}\right) y$$

wird, wenn in demselben für y ein Integral y_i von $P(y) = 0$ und für z das durch (2.) zugeordnete Integral z_i von $P(z) = 0$ gesetzt wird, in keinem endlichen Punkte der Ebene und auch nicht in $x = \infty$ gleich Null oder unendlich gross, muss daher, von etwaigen Logarithmen abgesehen, eine Constante sein.

Dass aber $P(y_i, z_i)$, wenn y_i und z_i mit Logarithmen behaftet sind, von den letzteren frei ist, geht aus Folgendem hervor: Ist nämlich

$$(12.) \qquad Q(y) = y^{(n-1)} + q_1 y^{(n-2)} + \cdots + q_{n-1} y = 0$$

diejenige Differentialgleichung $(n-1)$-ter Ordnung, der die $n-1$ Integrale $y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n$ genügen, so ist (d. J. Bd. 122, S. 50–51)

$$(13.) \qquad \frac{u_{(k)_i}}{z_i} = q_{n-k}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

daher

$$Q(y) = y^{(n-1)} + \frac{u_{(n-1)}}{z} y^{(n-2)} + \cdots + \frac{u_{(1)}}{z} y,$$

somit gemäss (11):

$$P(y, z) = z\,Q(y). \tag{14.}$$

Ferner ist (*Frobenius*, d. J. Bd. 76, S. 266): $\frac{1}{Q(y_i)} = z_i$, somit zufolge (14.):

$$P(y_i, z_i) = z_i Q(y_i) = 1.$$

Demnach ist $P(y_i, z_i)$ eine absolute Constante von dem Werthe Eins.

Allein nicht bloss, wenn für y und z ein durch (2.) zugeordnetes Werthepaar, sondern jedesmal, wenn für y irgend ein Integral von $P(y) = 0$ und gleichzeitig für z ein beliebiges Integral von $P_1(z) = 0$ in den Ausdruck $P(y, z)$ gesetzt wird, nimmt derselbe einen constanten, von x unabhängigen Werth an, wie aus (10.) unmittelbar hervorgeht.

3.

Werden die linearunabhängigen Integrale $y_1, y_2, \ldots, y_n$ von (1.) in der Form dargestellt (*Fuchs*, d. J. Bd. 66):

$$y_1 = v_1,\quad y_2 = v_1 \int v_2 dx,\quad \ldots,\quad y_n = v_1 \int v_2 dx \int v_3 dx \ldots \int v_n dx, \tag{15.}$$

so hat das zugehörige System der linearunabhängigen Integrale von (3.) die Gestalt (*Thomé*, d. J. Bd. 75):

$$\left\{\begin{aligned} z_1 &= (v_1 v_2 \ldots v_n)^{-1},\ z_2 = (v_1 v_2 \ldots v_n)^{-1} \int v_n dx, \\ z_3 &= (v_1 v_2 \ldots v_n)^{-1} \int v_n dx \int v_{n-1} dx, \ldots, \\ z_n &= (v_1 v_2 \ldots v_n)^{-1} \int v_n dx \int v_{n-1} dx \ldots \int v_3 dx \int v_2 dx, \end{aligned}\right. \tag{16.}$$

überdies ist (*Fuchs* l. c.):

$$p_1 = -\frac{d}{dx} \log v_1^n v_2^{n-1} \ldots v_{n-1}^2 v_n\,. \tag{17.}$$

Aus (8.) folgt:

$$u_{(n-1)} = p_1 z - \frac{dz}{dx} = z\left(p_1 - \frac{d \log z}{dx}\right), \tag{18.}$$

welche Beziehung mit Rücksicht auf (17.) sich verwandelt in:

$$u_{(n-1)} = -z \frac{d}{dx} \log (v_1^n v_2^{n-1} \ldots v_{n-1}^2 v_n)\, z. \tag{19.}$$

Und wenn in (19.) die Ausdrücke (16.) gesetzt werden, so erhält man das zu (15.) gehörige System linearunabhängiger Integrale der $(n-1)$-ten Adjungirten in der Form:

$$(20.)\quad \begin{cases} u_{(n-1)_1} = -(v_1 \dots v_n)^{-1} \dfrac{d}{dx} \log (v_1^{n-1} v_2^{n-2} \dots v_{n-1}), \\ u_{(n-1)_2} = -(v_1 \dots v_n)^{-1} \int v_n dx \cdot \dfrac{d}{dx} \log (v_1^{n-1} v_2^{n-2} \dots v_{n-1}) \int v_n dx, \\ u_{(n-1)_3} = -(v_1 \dots v_n)^{-1} \int v_n dx \int v_{n-1} dx \cdot \dfrac{d}{dx} \log (v_1^{n-1} v_2^{n-2} \dots v_{n-1}) \\ \qquad\qquad \int v_n dx \int v_{n-1} dx, \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_{(n-1)_n} = -(v_1 \dots v_n)^{-1} \int v_n dx \int v_{n-1} dx \dots \int v_2 dx \cdot \\ \qquad \dfrac{d}{dx} \log (v_1^{n-1} v_2^{n-2} \dots v_{n-1}) \int v_n dx \int v_{n-1} dx \dots \int v_2 dx. \end{cases}$$

Nebst der geschlossenen Form (19.) für die $(n-1)$te Adjungirte giebt es noch eine andere (d. J. Bd. 121):

$$(21.)\qquad u_{(n-1)_k} = (-1)^{n+k-1} \frac{\dfrac{d}{dx} D(y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}, \qquad (k = 1, \dots, n),$$

die mittelst der Formel (2.) verwandelt werden kann in:

$$(22.)\qquad u_{(n-1)_k} = -\frac{\dfrac{d}{dx} z_k D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}$$

oder wegen (*Fuchs* l. c.):

$$D(y_1, y_2, \dots, y_n) = v_1^n v_2^{n-1} \dots v_n$$

in:

$$(23.)\qquad u_{(n-1)_k} = -\frac{\dfrac{d}{dx} (v_1^n v_2^{n-1} \dots v_n) z_k}{v_1^n v_2^{n-1} \dots v_n} \qquad (k = 1, \dots, n).$$

Setzt man in (23) die Ausdrücke (16.) für die z_k, so erhält man:

$$(24.)\quad \begin{cases} u_{(n-1)_1} = -(v_1^n v_2^{n-1} \dots v_n)^{-1} \dfrac{d}{dx} v_1^{n-1} v_2^{n-2} \dots v_{n-1}, \\ u_{(n-1)_2} = -(v_1^n v_2^{n-1} \dots v_n)^{-1} \dfrac{d}{dx} v_1^{n-1} v_2^{n-2} \dots v_{n-1} \int v_n dx, \\ u_{(n-1)_3} = -(v_1^n v_2^{n-1} \dots v_n)^{-1} \dfrac{d}{dx} v_1^{n-1} v_2^{n-2} \dots v_{n-1} \int v_n dx \int v_{n-1} dx, \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_{(n-1)_n} = -(v_1^n v_2^{n-1} \dots v_n)^{-1} \dfrac{d}{dx} v_1^{n-1} v_2^{n-2} \dots v_{n-1} \int v_n dx \int v_{n-1} dx \\ \qquad\qquad \dots \int v_3 dx \int v_2 dx \end{cases}$$

als zweite Darstellung für die n linearunabhängigen Integrale $u_{(n-1)_1}, \ldots, u_{(n-1)_n}$ der $(n-1)$-ten Adjungirten mittelst der Functionen $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Diese neuen Ausdrücke (24.) sind mit denjenigen in (20.) identisch: denn es ist der vorstehende Ausdruck für

$$u_{(n-1)_1} = -(v_1 v_2 \ldots v_n)^{-1} \cdot (v_1^{n-1} v_2^{n-2} \ldots v_{n-1})^{-1} \frac{d}{dx} v_1^{n-1} v_2^{n-2} \ldots v_{n-1}$$

$$= -(v_1 \ldots v_n)^{-1} \frac{d}{dx} \log v_1^{n-1} v_2^{n-2} \ldots v_{n-1}.$$

Ferner ist $u_{(n-1)_2} =$

$$-(v_1 \ldots v_n)^{-1} \int v_n dx \cdot (v_1^{n-1} v_2^{n-2} \ldots v_{n-1} \int v_n dx)^{-1} \cdot \frac{d}{dx} v_1^{n-1} v_2^{n-2} \ldots v_{n-1} \int v_n dx$$

$$= -(v_1 \ldots v_n)^{-1} \int v_n dx \cdot \frac{d}{dx} \log v_1^{n-1} v_2^{n-2} \ldots v_{n-1} \int v_n dx.$$

Desgleichen

$$u_{(n-1)_3} = -(v_1 \ldots v_n)^{-1} \int v_n dx \int v_{n-1} dx \cdot (v_1^{n-1} \ldots v_{n-1} \int v_n dx \int v_{n-1} dx)^{-1} \cdot$$

$$\frac{d}{dx} v_1^{n-1} \ldots v_{n-1} \int v_n dx \int v_{n-1} dx = -(v_1 \ldots v_n)^{-1} \int v_n dx \int v_{n-1} dx \cdot$$

$$\frac{d}{dx} \log v_1^{n-1} \ldots v_{n-1} \int v_n dx \int v_{n-1} dx$$

u. s. w.

Ausser den Darstellungen in geschlossener Form (19.), (21.), (22.), (23.) für die $(n-1)$-te Adjungirte lassen sich noch andere herleiten. So ergiebt sich aus (21.) ebenfalls mittelst Formel (2.):

$$u_{(n-1)_k} = -z_k \frac{d}{dx} \log D(y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n) \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

und aus (22.) unmittelbar:

$$u_{(n-1)} = -e^{\int p_1 dx} \frac{d}{dx} z e^{-\int p_1 dx} \tag{25.}$$

oder auch:

$$u_{(n-1)} = -D(z_1, z_2, \ldots, z_n) \frac{d}{dx} \frac{z}{D(z_1, z_2, \ldots, x_n)}.$$

Was die Form (25.) betrifft, so bemerke ich Folgendes:
Im Bd. 98 d. J. S. 345 habe ich gezeigt, dass die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q, \tag{26.}$$

wo P und Q beliebige Coefficienten, in der Form darstellbar ist:

$$(27.) \qquad e^{-\int P dx} \frac{d}{dx} \frac{y}{e^{-\int P dx}} = Q.$$

Nimmt man nun statt (26.) die Gleichung (18.):

$$\frac{dz}{dx} - p_1 z = -u_{(n-1)},$$

so wird (27.):

$$e^{\int p_1 dx} \frac{d}{dx} \frac{z}{e^{\int p_1 dx}} = -u_{(n-1)},$$

woraus für $u_{(n-1)}$ der Ausdruck (25.) hervorgeht. Ersetzt man in letzterem z durch seinen Werth aus der ersten der Gleichungen (8.), so ist ferner:

$$u_{(n-1)} = -e^{\int p_1 dx} \frac{d}{dx} p_n^{-1} \frac{du_{(1)}}{dx} e^{-\int p_1 dx},$$

wodurch die $(n-1)$-te Adjungirte durch die 1te Adjungirte ausgedrückt erscheint.

4.

Das Gleichungssystem (8.) kann zusammengefasst so geschrieben werden:

$$(8.) \qquad \frac{du_{(n-k+1)}}{dx} = p_k z - u_{(n-k)} \qquad (k = 1, \ldots, n),\ u_{(0)} = 0.$$

Aus demselben ergiebt sich die folgende Beziehung:

$$\frac{u_{(n-k)}}{z} = p_k - \frac{d}{dx}\left(\frac{u_{(n-k+1)}}{z}\right) - \frac{u_{(n-k+1)}}{z} \cdot \frac{z'}{z}$$

(***Frobenius***, d. J. Bd. 76, S. 260–261), welche mittelst der Formel (13.) übergeht in:

$$(28.) \qquad q_k = p_k - \frac{dq_{k-1}}{dx} - q_{k-1} \frac{d \log z}{dx} \qquad (k = 1, \ldots, n),\ q_n = 0,$$

wo also $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$ die Coefficienten der Differentialgleichung (12): $Q(y) = 0$ bedeuten, mit der $P(y) = 0$ die Integrale $y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n$ gemeinsam hat. Der durch (28.) ausgedrückte Zusammenhang zwischen den p_k und q_k ist derselbe, der zwischen den Coefficienten der Gleichung (1.) und denen ihrer ersten Integralgleichung stattfindet (***Fuchs***, d. J. Bd. 68, S. 368 und ***Thomé***, Bd. 75, S. 268). Dies hat seinen Grund darin, dass wenn $P(y) = 0$ mit $Q(y) = 0$ die Lösungen $y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n$ gemeinsam hat, die Gleichung

$$(29.) \qquad Q(y) = c_i z_i^{-1}$$

wo c_i eine beliebige Constante, und z_i durch (2.) bestimmt ist, in der That erste Integralgleichung zu (1.) ist. Das Gleichungssystem (8.) kann, wenn umgekehrt die $u_{(k)}$ durch die q_k ausgedrückt werden, in der Form dargestellt werden:

$$(30.)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dz}{dx} = (p_1 - q_1)z,\ \dfrac{d(q_1 z)}{dx} = (p_2 - q_2)z,\ \dfrac{d(q_2 z)}{dx} = (p_3 - q_3)z, \ldots \\ \qquad\qquad \ldots,\ \dfrac{d(q_{n-2} z)}{dx} = (p_{n-1} - q_{n-1})z,\ \dfrac{d(q_{n-1} z)}{dx} = p_n z. \end{array} \right.$$

Durch Integration ergiebt sich dann aus (30.), dass z durch jeden der folgenden n äquivalenten Ausdrücke darstellbar ist:

$$(31.)\qquad z = q_{k-1}^{-1} e^{\int (p_k - q_k)\, q_{k-1}^{-1}\, dx}$$

($k = 1, 2, \ldots, n$), $q_n = 0$, deren erster: $z = e^{\int (p_1 - q_1)\, dx}$ von früher schon bekannt ist (*Thomé* l. c.). Hieraus folgt: ***Ist ein Integral z der Gleichung*** (3.): $P_1(z) = 0$ ***bekannt, so ist durch*** (8.) ***auch je ein Werth von*** $u_{(1)}, u_{(2)}, \ldots, u_{(n)}$ ***und damit auch durch*** (13.) ***je ein Werth von*** $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$ ***gegeben, hiemit aber auch eine erste Integralgleichung*** (29.) ***von*** $P(y) = 0$ ***bestimmt.***

Die Coefficienten q_k lassen sich übrigens aus den Formeln (28.) ohne Vermittelung der $u_{(k)}$ unmittelbar durch das Integral z ausdrücken, denn aus der ersten derselben ergiebt sich: $q_1 = p_1 - \dfrac{d \log z}{dx}$; mittelst dieses Werthes hierauf aus der zweiten der Werth für q_2 u. s. w., aus der $(n-1)$-ten schliesslich der Werth für q_{n-1}. Wird dieser letztere in die $n$te dieser Formeln (28.) gesetzt, so kommt die Gleichung $P_1(z) = 0$ wieder zum Vorschein.

Ueber das Gleichgewicht kosmischer Gasmassen.

(Von Herrn *H. Lemke* in Hamburg.)

1. In dem gewöhnlichen dreidimensionalen Raume mögen ganz im Endlichen eine Anzahl fester Körper von unveränderlicher Lage und endlicher Gesammtmasse gegeben sein. Zwischen jenen Körpern soll ein homogenes Gas von überall gleicher Temperatur, welches dem *Mariotte*schen Gesetze genügt, und dessen Theile sich nach dem *Newton*schen Gesetze anziehen, den Raum stetig erfüllen. Aufgabe dieser Abhandlung ist es, festzustellen, ob es möglich ist, den Druck p des Gases als Function der drei Raumcoordinaten so zu bestimmen, dass die Gasmasse sich im Gleichgewichte befindet.

Einen besonderen Fall der hier gestellten Aufgabe hat meines Wissens zuerst ***Zöllner*** in seiner „Natur der Kometen“ S. 301 und fgd. untersucht. Er betrachtet dort eine Gasmasse, welche sich im Raume centrisch um einen Punkt herum anordnet, deren Druck also nur eine Function der Entfernung von jenem Punkte ist. Als Gleichgewichtsbedingung ergiebt sich für p die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 \log p}{dr^2} + \frac{2}{r}\,\frac{d \log p}{dr} + 2\lambda p = 0,$$

wo λ eine Constante ist. ***Zöllner*** findet das particuläre Integral $p = \frac{1}{\lambda r^2}$. Die Herstellung des allgemeinen Integrals ist ihm nicht gelungen.

Wenn man das oben angegebene allgemeine Gleichgewichtsproblem behandeln will, so geht man am zweckmässigsten von den bekannten

hydrostatischen Gleichgewichtsbedingungen aus und sucht dieselben so zu transformiren, dass aus ihnen eine partielle Differentialgleichung für den Druck p resultirt. Bezeichnet man mit ε, p und Φ die Dichtigkeit, den Druck und den Werth des Potentials sämmtlicher Kräfte, welche auf den Flüssigkeitspunkt (x, y, z) einwirken, so ist im Falle des Gleichgewichts:

$$dp = \varepsilon \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz \right).$$

Die Kraftcomponenten setzen sich für das vorliegende Problem aus zwei Theilen zusammen: erstens aus den Attractionswirkungen der im Raume vorhandenen festen Körper und zweitens aus der Anziehung der gesammten Gasmasse. Nennt man U und V die Potentiale der betreffenden Kräfte, so findet man zunächst die Gleichung:

$$dp = \varepsilon \cdot (dU + dV).$$

Nach dem *Mariotte*schen Gesetze ist $p = a^2 \cdot \varepsilon$, a^2 eine Constante; also:

$$(1.) \qquad a^2 d \log p = dU + dV.$$

Der Punkt (x, y, z) ist für die festen Körper ein äusserer, für die Gasmasse dagegen ein innerer. Infolge dessen wird: $\Delta U = 0$, $\Delta V = -4\pi f \cdot \varepsilon$, wo mit f die Gravitationsconstante bezeichnet wird. Es ergiebt sich demnach:

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 \log p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \log p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \log p}{\partial z^2} \right) = -4\pi f \cdot \varepsilon.$$

Für ε setzt man wiederum seinen Werth $\frac{p}{a^2}$; führt man nun weiter die Bezeichnungen $\log p = u$, $\frac{2\pi f}{a^4} = \lambda$ ein, so gelangt man zu der gesuchten partiellen Differentialgleichung:

$$(2.) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -2\lambda e^u,$$

welche für alle folgenden Untersuchungen die Grundlage bilden wird. Denn existirt irgend eine Druckvertheilung des Gases, welche einem Gleichgewichtszustande entspricht, so genügt der Logarithmus des Druckes als Function der drei Raumcoordinaten jener Gleichung.

Die Relation (2.) scheint bisher unter den partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik keine hervorragende Rolle gespielt zu haben. Mir ist wenigstens kein anderes Problem bekannt, dessen Lösung die Integration jener Gleichung erfordert. Ihre Bedeutung für die Theorie der Flächen constanten Krümmungsmaasses (im Falle zweier unabhängiger

Variabeln) braucht dagegen wohl kaum besonders hervorgehoben zu werden.

2. Es wird zweckmässig sein, einige specielle Voraussetzungen über die Natur der Function $p(x, y, z)$ zu machen. In der Theorie des *Newton*schen Potentials pflegt man im allgemeinen nur solche Integrale der *Laplace*schen Gleichung zu betrachten, welche eindeutig sind und im Unendlichen wie $\frac{1}{r}$ verschwinden. Ebenso soll auch hier angenommen werden, dass der Druck im ganzen unendlichen Raume eine eindeutige und stetige Function von x, y, z ist und im Unendlichen wie $\frac{1}{r^\alpha}$ verschwindet, wo α eine positive Zahl ist, welche sogleich bestimmt werden wird.

Die Gleichgewichtsbedingung lässt sich in der Form:

$$a^2 \frac{\partial \log p}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial r}$$

schreiben. Die linke Seite verschwindet für wachsendes r wie $\frac{1}{r}$, die Function $\frac{\partial U}{\partial r}$ auf der rechten Seite wie $\frac{1}{r^2}$. Es muss daher α so gewählt werden, dass $\frac{\partial V}{\partial r}$ im Unendlichen wie $\frac{1}{r}$ verschwindet. Dies ist aber nur möglich, wenn man $\alpha = 2$ setzt. Die Richtigkeit dieses Satzes ergiebt sich leicht, wenn man in den Ausdruck

$$\frac{\partial V}{\partial r} = f \cdot \frac{\partial}{\partial r} \iiint \frac{\varepsilon \cdot d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}}$$

an Stelle der rechtwinkligen Coordinaten Polarcoordinaten einsetzt.

Bei der Ableitung der partiellen Differentialgleichung für $\log p$ war die Gleichgewichtsbedingung (1.), in welcher die Ableitungen $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ auftraten, die Ausgangsrelation gewesen. Es wird der Nachweis nothwendig sein, dass jene Functionen, welche sich als dreifache Integrale, erstreckt über den ganzen unendlichen vom Gase erfüllten Raum, darstellen, einen wohlbestimmten Sinn besitzen. Vor allem muss man zeigen, dass der Werth eines solchen Integrals im allgemeinen ein endlicher ist. Zu diesem Zwecke zerlegt man das Integrationsgebiet durch eine Kugel mit dem Radius R, welche alle festen Körper umschliesst und beliebig gross angenommen werden kann, in zwei Theile. Derjenige Bestandtheil des dreifachen Integrals, welcher sich auf das Innere jener Kugel bezieht, ist natürlich eine endliche

Grösse. Aber dasselbe gilt auch von dem zweiten Theile, dessen Integrationsgebiet durch den ganzen unendlichen Raum ausserhalb der Kugel gebildet wird. Man überzeugt sich davon leicht durch Einführung von Polarcoordinaten.

Ganz anders liegen aber die Verhätnisse, wenn man das Raumintegral durch welches die Potentialfunction V definirt werden müsste, in derselben Weise untersucht. Es zeigt sich, dass dieses Integral für keinen im Endlichen gelegenen Punkt (x, y, z) einen endlichen Werth besitzt. Es ist daher zweckmässig, jene Function gänzlich aus dem Kreise der Betrachtungen auszuschliessen und bei allen Untersuchungen allein auf die Kraftcomponenten zurückzugehen.

Die Bedeutung dieser Bemerkungen wird sich am klarsten aus einem einfachen Beispiele ergeben. *Zöllner* fand, wie bereits erwähnt, als specielle Druckvertheilung des Gleichgewichts die Function $p = \frac{1}{\lambda r^2}$. Berechnet man damit das Potential der in einer Kugelschale mit den Radien r und R enthaltenen Gasmasse, so erkennt man, dass mit wachsenden Werthen von R, d. h. mit wachsender Dicke jener Schale, der Werth des Potentials wie $\lg R$ unendlich wird, die Kraftcomponente in der Richtung des Radius ist dagegen eine endliche Grösse.

3. Bisher ist nur gezeigt worden, dass, wenn ein Gas sich im Gleichgewichte befindet, der Druck als Function der drei Raumcoordinaten der partiellen Differentialgleichung (2.) zu genügen hat. Es soll jetzt umgekehrt untersucht werden, ob auch jedes Integral dieser Gleichung, welches auf einer Anzahl geschlossener Flächen F_λ vorgeschriebene Werthe besitzt, ausserhalb derselben nebst seinen ersten Ableitungen eindeutig und stetig ist und im Unendlichen wie $\frac{1}{r^2}$ verschwindet, die Druckvertheilung einer im Gleichgewicht befindlichen Gasmasse bestimmt.

Ich denke mir aus dem unendlichen Raume durch eine Kugel mit dem Radius R, welcher beliebig gross angenommen werden darf, ein Gebiet herausgeschnitten, das den Punkt (x, y, z) sowie die geschlossenen Flächen F_λ in seinem Innern enthält. Auch um (x, y, z) soll eine kleine Kugel mit dem Radius δ construirt werden. Ich betrachte dann das Integral:

$$dV = \frac{f}{a^2} \cdot d \iiint \frac{p(\xi,\eta,\zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2}},$$

welches sich über den von den Kugeln mit den Radien R und δ, sowie von den Flächen F_λ begrenzten Theil des Raumes erstrecken soll. Wenn man für p seinen Werth aus der Differentialgleichung (2.) einsetzt, so erhält man zunächst

$$dV = -\frac{a^2}{4\pi} d\iiint \frac{\Delta u \cdot d\xi d\eta d\zeta}{\varrho},$$

wo $\varrho = \sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$ ist. Das Raumintegral lässt sich in das Oberflächenintegral:

$$dV = -\frac{a^2}{4\pi} d\int \left(u \frac{\partial\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{\partial n} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\omega$$

verwandeln; n bedeutet darin die Richtung der Flächennormale nach dem Innern des Integrationsgebietes. Das Integral über die Oberfläche der Kugel mit dem Radius δ convergirt mit abnehmenden Werthen von δ gegen $a^2 d\log p$; derjenige Theil von dV, welcher sich auf die grosse Kugel mit dem Radius R bezieht, verschwindet, wenn R unbegrenzt wächst; die Integrale über die Oberflächen F_λ sind Functionen von (x, y, z), welche überdies von den Werthen der Functionen u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ auf den geschlossenen Flächen abhängen. Man findet demnach für dV die folgende Zerlegung:

$$dV = a^2 d\log p - \frac{a^2}{4\pi} d\int_{F_\lambda} \left(u \frac{\partial\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{\partial n} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\omega.$$

Nach bekannten Sätzen aus der Potentialtheorie kann man sich das Innere der Flächen F_λ so mit Masse erfüllt denken, dass die Wirkung jener Massen auf einen äusseren Punkt dem Werthe des Integrals

$$\frac{a^2}{4\pi}\int_{F_\lambda} \left(u \frac{\partial\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{\partial n} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\omega$$

gleichkommt. Nennt man aber dieses Potential U, so erhält man schliesslich die Gleichung

$$a^2 d\log p = dU + dV,$$

welche mit (1.) identisch ist. Es ist also in der That möglich, jedes Integral der partiellen Differentialgleichung (2.), welches auf einer Anzahl ge-

schlossener Flächen vorgeschriebene Werthe annimmt und im Unendlichen wie $\log r$ unendlich wird, als Logarithmus der Druckvertheilung einer im Gleichgewicht befindlichen Gasmasse zu betrachten.

Von der bekannten Formel

$$\iiint \triangle u \cdot dx\, dy\, dz = -\int \frac{\partial u}{\partial n} \cdot d\omega,$$

in welcher sich die Integration über das Innere bezw. die Begrenzung eines räumlichen Gebietes erstreckt, kann man für das vorliegende Problem eine Anwendung machen. Setzt man nämlich voraus, dass das Gebiet ganz dem von dem Gase erfüllten Raume angehört und im Endlichen liegt, und führt man in die angegebene Formel auf der linken Seite für $\triangle u$ seinen Werth $-\frac{4\pi f}{a^2} \cdot \varepsilon$ ein, so ist das Raumintegral, abgesehen von einer multiplicativen Constanten, gleich der Masse des Gases innerhalb jenes Bereiches. Die Formel lehrt, dass diese Masse durch die Werthe von $\frac{d \log p}{\partial n}$ auf der Begrenzung vollkommen bestimmt ist. Erstreckt man die Integration über den ganzen vom Gase erfüllten unendlichen Raum, welcher von den Flächen F_λ und der unendlich grossen Kugel begrenzt ist, so ergiebt sich aus derselben Gleichung für die Gesammtmasse des Gases ein unendlich grosser Werth. Weil nämlich auf Grund früherer Voraussetzungen $\frac{\partial u}{\partial n}$ mit wachsender Entfernung R wie $\frac{1}{R}$ abnimmt, muss das Oberflächenintegral

$$\int \frac{\partial u}{\partial n} \cdot d\omega,$$

erstreckt über eine Kugel mit dem Radius R, wie die erste Potenz von R unendlich werden, wenn der Werth des Kugelradius jede Grenze überschreitet. Dieses Resultat kann man benutzen, um die Frage zu entscheiden, ob für ein Gas von endlicher Gesammtmasse ein Gleichgewichtszustand möglich ist. Man überzeugt sich leicht, dass dies nur dann der Fall ist, wenn Druck und Dichtigkeit im ganzen unendlichen Raume den Werth Null haben.

4. Nach diesen allgemeinen Betrachtungen über das Gleichgewicht von Gasmengen soll mit der Differentialgleichung $\triangle u = -2\lambda e^u$ eine Transformation vorgenommen werden, die sich später als zweckmässig herausstellen wird. Da der Druck im Unendlichen wie $\frac{1}{r^2}$ verschwinden sollte,

kann man

$$u = -2\log r + v \tag{3.}$$

setzen und von der Function v annehmen, dass sie ausserhalb der geschlossenen Flächen F_i im ganzen unendlichen Raume einschliesslich des unendlich fernen Punktes eindeutig und stetig ist. Führt man nun den angegebenen Ausdruck für u in die partielle Differentialgleichung ein, so erhält man eine Gleichung für v

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{2(1-\lambda e^v)}{r^2}. \tag{4.}$$

Ein particuläres Integral ist $v = -\log\lambda$, die entsprechende Druckvertheilung des Gases $p = \frac{1}{\lambda r^2}$.

Wenn es sich darum handelt, Integrale der Differentialgleichung (4.) herzustellen, welche auf gegebenen Flächen vorgeschriebene Werthe annehmen und innerhalb bezw. ausserhalb derselben eindeutig und stetig sind, so wird man mit Vorteil von der Methode der successiven Annäherungen, welche Herr *Picard* in einer Reihe von Abhandlungen entwickelt hat, Gebrauch machen können. Jene Untersuchungen, welche sich zunächst nur auf partielle Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Variablen beziehen, lassen sich zum grossen Theil auch auf Gleichungen mit drei Veränderlichen anwenden. Auf eine eingehende Darlegung jener Methode, welche im vorliegenden Falle durch manche Specialuntersuchung zu ergänzen wäre, soll jedoch an dieser Stelle verzichtet werden. Ich möchte dagegen einen besonderen Gleichgewichtszustand des Gases, welcher mir ein gewisses Interesse zu verdienen scheint, ausführlicher behandeln. Transformirt man nämlich die Differentialgleichung (4.) auf Polarcoordinaten, indem man

$$x = r\cdot\sin\vartheta\cdot\sin\varphi, \qquad y = r\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\varphi, \qquad z = r\cdot\cos\vartheta$$

setzt, so findet man für v die neue Gleichung

$$r^2\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial v}{\partial r} + \operatorname{ctg}\vartheta\frac{\partial v}{\partial\vartheta} + \frac{\partial^2 v}{\partial\vartheta^2} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} = 2(1-\lambda e^v).$$

Man erkennt nun sogleich, dass es möglich sein muss, particuläre Integrale dieser Differentialgleichung zu finden, welche nur von ϑ und φ, aber nicht von r abhängen. Jedem Integral der Gleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\vartheta^2} + \operatorname{ctg}\vartheta\frac{\partial v}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} = 2(1-\lambda e^v) \tag{5.}$$

würde also eine Druckvertheilung des Gases entsprechen, deren analytischer Ausdruck in der Form

$$p = \frac{1}{r^2} \cdot F(\varphi, \vartheta)$$

dargestellt werden könnte, wo $F(\varphi, \vartheta)$ von r unabhängig ist. Man kann die partielle Differentialgleichung (5.) durch eine Transformation sowohl der abhängigen wie auch der unabhängigen Variablen in eine für die weitere Behandlung bequemere Form überführen, indem man

$$(6.) \qquad \begin{cases} v = -\log \lambda - 2 \log \sin \vartheta + w, \\ \xi = \operatorname{tg} \vartheta \cdot \sin \varphi, \\ \eta = \operatorname{tg} \vartheta \cdot \cos \varphi, \end{cases}$$

setzt. Für w erhält man die Gleichung

$$(7.) \quad (1+\xi^2)\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + 2\,\xi\eta\frac{\partial^2 w}{\partial \xi\,\partial \eta} + (1+\eta^2)\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + 2\,\xi\frac{\partial w}{\partial \xi} + 2\,\eta\frac{\partial w}{\partial \eta} = -\frac{2e^w}{\xi^2+\eta^2}.$$

Man kann die Transformation weiter fortsetzen und zwei neue Variable α und β durch die Gleichungen

$$(8.) \qquad \alpha = \frac{\xi\eta}{1+\eta^2}, \qquad \beta = \frac{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}{1+\eta^2}$$

definiren. Als Function von α und β genügt w der partiellen Differentialgleichung

$$(9.) \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} = -2\left(\frac{1+\eta^2}{\xi^2+\eta^2}\right)^2 e^w,$$

wo für ξ und η auf der rechten Seite diejenigen Functionen von α und β zu nehmen sind, welche sich aus den Relationen (8.) ergeben. Aus der Relation (9.) geht hervor, dass der Ausdruck

$$(10.) \qquad e^w \cdot (d\alpha^2 + d\beta^2)$$

als das Quadrat des Linienelements einer Fläche aufgefasst werden kann, deren Krümmungsmaass den Werth

$$(11.) \qquad K = \left(\frac{1+\eta^2}{\xi^2+\eta^2}\right)^2$$

besitzt.

Zum Schluss möge noch auf den Zusammenhang hingewiesen werden, der zwischen der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2\,\lambda e^u,$$

wenn man sich auf zwei unabhängige Variable beschränkt, und der Theorie der *Fuchs*schen Functionen besteht. Herr *Poincaré**) hat bekanntlich diesen Zusammenhang zum Gegenstand einer längeren Untersuchung gemacht, und zwar unter der Voraussetzung, dass die rechte Seite dieser Gleichung das positive Zeichen besitzt. Bezeichnet man nämlich mit $Z = \varphi(z)$ eine *Fuchs*sche Function der unabhängigen Variable z und zerlegt man sowohl Z als auch z in den reellen und imaginären Bestandtheil

$$Z = X + iY, \qquad z = x + iy,$$

setzt man ferner voraus, dass die projective Gruppe, welche $\varphi(z)$ ungeändert lässt, den *reellen* Kreis

$$x^2 + y^2 = 1$$

der z-Ebene in sich selbst transformirt, so genügt die Function u, welche durch die Gleichung

$$e^u = \frac{dx^2 + dy^2}{dX^2 + dY^2} \cdot (1 - x^2 - y^2)^{-2}$$

definirt ist, der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = 8\, e^u.$$

Nimmt man dagegen an, dass die Substitutionen der Gruppe einen *imaginären* Kreis

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

in sich selbst transformiren, so gelangt man, indem man unter dieser Voraussetzung die Untersuchungen des Herrn *Poincaré* Schritt für Schritt wiederholt, zu dem Ergebniss, dass die Function u der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = -\,8\, e^u$$

zu genügen hat.

---

*) Journal de Math. 1898 p. 137 u. flgd.

Ueber asymptotische Darstellungen von Functionen.

(Von Herrn *L. W. Thomé* in Greifswald.)

Bei den Untersuchungen, welche Herr *Poincaré* über die asymptotische Darstellung von Integralen linearer Differentialgleichungen — American Journal of Mathematics VII, Acta Mathematica VIII — veröffentlicht hat, ist von demselben — Acta Mathematica VIII § 1 — auf die asymptotische Darstellung durch die *Stirling*sche Reihe Bezug genommen worden. Im Folgenden soll der Unterschied, welcher zwischen der für eine Function vorhandenen asymptotischen Darstellung von der Art des *Stirling*schen Ausdruckes und der asymptotischen Darstellung von der Art der von Herrn *Poincaré* für Integrale linearer Differentialgleichungen gegebenen Ausdrücke im allgemeinen besteht, discutirt und die charakteristische Eigenschaft jeder dieser beiden Arten asymptotischer Darstellungen ausgedrückt werden.

1.

Die *Stirling*sche Reihe ist ausführlich behandelt von *Serret* in Cours de Calcul diff. et int. II. Es besteht für reelle positive Werthe von x die Relation

$$(1.)\quad \begin{cases} \log \Gamma(x+1) = \frac{1}{2}\log 2\pi - x + (x+\frac{1}{2})\log x \\ + \frac{B_1}{1\cdot 2}\frac{1}{x} - \frac{B_2}{3\cdot 4}\frac{1}{x^3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n-1)\,2n}\frac{1}{x^{2n-1}} + D \end{cases}$$

$$(2.)\quad D = (-1)^n \theta \frac{B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}\frac{1}{x^{2n-1}},$$

worin B die *Bernoulli*schen Zahlen sind, θ eine positive Grösse zwischen 0 und 1. Wird D in (1.) weggelassen, und die Reihe nach dem vorhandenen Gesetze fortgesetzt, so entsteht die divergente *Stirling*sche Reihe. Wenn nun diese Reihe bei dem Gliede, welches in (1.) D vorangeht, abgebrochen wird, so stellt der beibehaltene Theil die Function $\log \Gamma(x+1)$ asymptotisch dar. Die Bedeutung dieser asymptotischen Darstellung ist dann die, dass die Differenz zwischen Function und asymptotischem Ausdrucke nämlich die Grösse D, welche durch (2.) gegeben ist, mit ins Unendliche wachsendem positivem x unendlich klein wird.

In dem hier vorliegenden Falle leistet der durch (2.) gegebene Ausdruck für diese Differenz noch mehr. Dieser Ausdruck gestattet auch bei jedem positiven Werthe von x eine obere Grenze für den bei Anwendung der asymptotischem Darstellung der Function begangenen Fehler anzugeben.

2.

Die *Poincaré*schen asymptotischen Darstellungen von Integralen linearer Differentialgleichungen haben folgende Ausdrücke.

Es soll hier ein Hauptfall dieser Darstellungen betrachtet werden, der von Herrn *Picard* in Traité d'Analyse T. III Kapitel 14 eingehend behandelt worden ist. Für reelle positive Werthe von x bestehen — s. l. c. S. 389 — bei einer homogenen linearen Differentialgleichung $m$ter Ordnung mit rationalen Coefficienten von der l. c. S. 385 angegebenen Beschaffenheit folgende Ausdrücke der Integrale $y_\mathfrak{a}(\mathfrak{a} = 1, \ldots, m)$:

$$(1.)\quad \left\{ \begin{aligned} y_\mathfrak{a} = e^{\alpha_\mathfrak{a} x} x^{-\lambda_\mathfrak{a}-1} (e^{2\lambda_\mathfrak{a}\pi i} - 1)\, \Gamma(\lambda_\mathfrak{a}+1) \Big[A_{\mathfrak{a}0} + A_{\mathfrak{a}1} \frac{(\lambda_\mathfrak{a}+1)}{x} + \cdots \\ + A_{\mathfrak{a}n} \frac{(\lambda_\mathfrak{a}+1)\cdots(\lambda_\mathfrak{a}+n)}{x^n} + \frac{\varepsilon_\mathfrak{a}}{x^n} \Big], \end{aligned} \right.$$

worin die Exponenten $-\lambda_\mathfrak{a}-1$ nicht ganzzahlig sein sollen, Mod $A_{\mathfrak{a}0}$ von Null verschieden ist. Die Coefficienten $\alpha_\mathfrak{a}$ in den Exponentialfactoren $e^{\alpha_\mathfrak{a} x}$ sind die Wurzeln einer Gleichung $m$ten Grades, deren Constanten durch Constanten in den rationalen Coefficienten der Differentialgleichung gegeben sind. Es werde vorausgesetzt, dass die reellen Theile der Coefficienten $\alpha_\mathfrak{a}(\mathfrak{a} = 1, \ldots, m)$ unter einander verschieden sind; hieraus ergiebt sich, dass die m Ausdrücke (1.) $(\mathfrak{a} = 1, \ldots, m)$ linearunabhängig sind. Die Grösse $\varepsilon_\mathfrak{a}$ convergirt mit ins Unendliche wachsendem positivem x gegen Null. Der asymptotische

Ausdruck von $y_\mathfrak{a}$ ist alsdann:

$$(2.)\quad \left\{ e^{\alpha_\mathfrak{a} x}\, x^{-\lambda_\mathfrak{a}-1} (e^{2\lambda_\mathfrak{a}\pi i}-1)\, \Gamma(\lambda_\mathfrak{a}+1) \left[A_{\mathfrak{a}0} + A_{\mathfrak{a}1} \frac{(\lambda_\mathfrak{a}+1)}{x} + \cdots + A_{\mathfrak{a}n} \frac{(\lambda_\mathfrak{a}+1)\cdots(\lambda_\mathfrak{a}+n)}{x^n} \right] \right.$$

Die Differenz zwischen $y_\mathfrak{a}$ und dem Ausdrucke (2.) ist

$$(3.)\qquad e^{\alpha_\mathfrak{a} x}\, x^{-\lambda_\mathfrak{a}-1} (e^{2\lambda_\mathfrak{a}\pi i}-1)\, \Gamma(\lambda_\mathfrak{a}+1)\, \frac{\varepsilon_\mathfrak{a}}{x^n}.$$

Diese Differenz enthält nun neben der unendlich klein werdenden Grösse $\frac{\varepsilon_\mathfrak{a}}{x^n}$ den Exponentialfactor $e^{\alpha_\mathfrak{a} x}$. Wenn der reelle Theil β von $\alpha_\mathfrak{a}$ positiv (>0) ist, so convergirt $\frac{e^{\beta x}}{x^\gamma}$, wo γ eine beliebige reelle Constante ist, mit x gegen ∞. Was aber die Grösse $\varepsilon_\mathfrak{a}$ angeht, so ergiebt die Herleitung des asymptotischen Ausdruckes nur soviel, dass diese Grösse, wie Herr *Picard* l. c. S. 389 den Sachverhalt ausdrückt, mit $\frac{1}{x}$ gegen Null convergirt; in dieser Beziehung ist der bei *Picard* l. c. S. 388 vorkommende Ausdruck $\frac{1}{x}\frac{\mu\varrho^{n+1}}{1-r\varrho}$ von Bedeutung.

Es tritt hier der Unterschied gegen den Fall der *Stirling*schen Reihe hervor:

Von der Differenz zwischen Function und asymptotischer Darstellung derselben weiss man nicht, dass dieselbe mit ins Unendliche wachsendem positivem x unendlich klein wird; man weiss überhaupt nicht, ob dieselbe eine endlich bleibende obere Grenze besitzt.

Wenn in allen $\alpha_\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a} = 1, \ldots, m$) die reellen Theile grösser als Null sind, so gilt das vorhin Gesagte von jedem Integrale

$$(4.)\qquad c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_m y_m,$$

wo die c Constanten sind.

Aber auch wenn nur in einem einzigen der $\alpha_\mathfrak{a}$ der reelle Theil grösser als Null ist, so befindet man sich bei einem Integrale wie (4.) in derselben Lage wie vorhin. Denn wenn die Constanten c berechnet werden können, so würden dieselben doch nur angenähert zu ermitteln sein, und dann lässt sich nicht entscheiden, ob eine dieser Constanten genau gleich Null ist.

Nur in dem Falle, wenn in den sämmtlichen $\alpha_\mathfrak{a}\,(\mathfrak{a}=1,\ldots,m)$ die reellen Theile negativ sind, oder falls in einem $\alpha_\mathfrak{a}$ der reelle Theil gleich Null ist, wenn alsdann n so gewählt wird, dass der reelle Theil von $n+\lambda_\mathfrak{a}+1$ grösser als -1 ist, ergiebt sich aus (3.) für jedes Integral (4.), dass die Differenz zwischen Function uud asymptotischer Darstellung mit ins Unendliche wachsendem positivem x gegen Null convergirt.

Wird das Integral $y_\mathfrak{a}$ (1.) durch $e^{\alpha_\mathfrak{a} x}\,x^{-\lambda_\mathfrak{a}-1}$ dividirt, so hat dieser Quotient zum asymptotischen Ausdrucke

$$(5.)\quad (e^{2\lambda_\mathfrak{a}\pi i}-1)\,\Gamma(\lambda_\mathfrak{a}+1)\left[A_{\mathfrak{a}0}+A_{\mathfrak{a}1}\,\frac{(\lambda_\mathfrak{a}+1)}{x}+\cdots+A_{\mathfrak{a}n}\,\frac{(\lambda_\mathfrak{a}+1)\cdots(\lambda_\mathfrak{a}+n)}{x^n}\right].$$

Derselbe werde durch S_n bezeichnet. Für die Function $y_\mathfrak{a}\,e^{-\alpha_\mathfrak{a} x}\,x^{\lambda_\mathfrak{a}+1}$ und S_n besteht die Beziehung wie bei dem *Stirling*schen Ausdrucke (Nr. 1). Die Differenz zwischen beiden Functionen wird mit ins Unendliche wachsendem positivem x unendlich klein; und zwar ist

$$(6.)\qquad \lim_{x=\infty}\{x^n(y_\mathfrak{a}\,e^{-\alpha_\mathfrak{a}}\,x^{\lambda_\mathfrak{a}+1}-S_n)\}=0;$$

siehe die Angaben bei *Poincaré* Acta Mathematica VIII § 1 und § 3.

3.

In den Grössen $\alpha_\mathfrak{a}\,(\mathfrak{a}=1,\ldots,m)$ in Nr. 2 sollten die reellen Theile unter einander verschieden sein. Bei einem Integrale Nr. 2 (4.) sei in den y, deren Coefficienten c von Null verschieden sind, der grösste reelle Theil in den $\alpha_\mathfrak{a}$ durch h bezeichnet.

Der asymptotische Ausdruck Nr. 2 (2.) von $y_\mathfrak{a}$ sei durch $s_\mathfrak{a}$ bezeichnet, so ist der asymptotische Ausdruck von

$$(1.)\qquad c_1\,y_1+c_2\,y_2+\cdots+c_m\,y_m=Y$$

der Ausdruck

$$(2.)\qquad c_1\,s_1+c_2\,s_2+\cdots+c_m\,s_m=S.$$

In dem $y_\mathfrak{a}$, in welchem der reelle Theil des $\alpha_\mathfrak{a}$ die Grösse h ist, sei der Exponent $-\lambda_\mathfrak{a}-1$ in $x^{-\lambda_\mathfrak{a}-1}$ durch ϱ bezeichnet. Dann wird

$$(3.)\qquad Y=e^{hx}\,x^{\varrho}\,(Y\,e^{-hx}\,x^{-\varrho}),$$

$$(4.)\qquad S=e^{hx}\,x^{\varrho}\,(S\,e^{-hx}\,x^{-\varrho})$$

gesetzt. Nun ergiebt sich für den Quotienten

$$(5.)\qquad \lim_{x=\infty}\frac{Y}{S}=1.$$

Dasselbe findet bei jedem einzelnen y_α Nr. 2 (1.) und dessen asymptotischem Ausdrucke Nr. 2 (2.) statt, welches auch der Coefficient α_α sein möge. Vgl. *Poincaré,* American Journal VII S. 258.

Man kann nun die beiden Arten von asymptotischen Darstellungen von Functionen bei reellen positiven grossen Werthen von x, die in Nr. 1 und 2 betrachtet sind, in folgender Weise charakterisiren:

Die erste Art von asymptotischen Darstellungen von Functionen — zu derselben gehört der *Stirling*sche Ausdruck — ist dadurch charakterisirt, dass die Differenz zwischen Function und asymptotischer Darstellung derselben mit ins Unendliche wachsendem positivem x gegen Null convergirt.

Die zweite Art von asymptotischen Darstellungen von Functionen — zu dieser gehört die in Nr. 2 betrachtete *Poincaré*sche asymptotische Darstellung von Integralen einer linearen Differentialgleichung — ist dadurch charakterisirt, dass der Quotient von Function und asymptotischer Darstellung derselben mit ins Unendliche wachsendem positivem x gegen Eins convergirt.

Bemerkung: In den Formeln Nr. 2 (1.) (2.) (5.), die bei *Picard* l. c. vorkommen, ist an Stelle von $A_{\alpha k} (k = 0, \ldots, n)$ zu setzen $e^{(\lambda_\alpha + 1)\pi i} (-1)^k A_{\alpha k}$, s. l. c. S. 388 Z. 4 von oben. Ebenso bei *Poincaré* Acta Mathem. VIII § 3.

Die Vertheilung der Electricität auf zwei leitenden Kugeln.

(Von Herrn *J. B. Goebel* in Mainz).

Das Problem der Electrostatik: die Vertheilung der Electricität auf zwei sich influenzirenden Leitern zu bestimmen — ist bekanntlich *allgemein* nur gelöst für den Fall, dass die beiden Leiter Kugelgestalt haben.

Poisson, welchem zuerst die Aufstellung der allgemeinen Gleichungen zur Berechnung der Potentiale gelang, bestimmte die *electrischen Dichtigkeiten* auf den Kugeln in der Weise, dass er je für den concreten Fall geeignete Gleichungen zur Berechnung der Dichtigkeiten ableitete.

Zu verhältnissmässig *einfachen, allgemeinen Ausdrücken* für die electrischen Dichtigkeiten gelangt man, wenn man der Entwicklung die übersichtlichen Formen zu Grunde legt, welche *Kirchhoff* den *Poisson*schen Gleichungen zur Berechnung der Potentiale gegeben hat*).

Wir bezeichnen mit K_1, K_2 die beiden leitenden Kugeln, O_1, O_2 deren Mittelpunkte, c die Entfernung derselben, a, b die Radien der Kugeln K_1, K_2, A, B die Gesammtpotentiale auf denselben.

Wir legen weiter, wie üblich, den Ursprung des Coordinatensystems in den Mittelpunkt O_1 der Kugel K_1 und bezeichnen mit ϑ den Winkel, welchen irgend ein Radius vector ϱ mit der (nach der Kugel K_2 hinweisenden)

*) Vergl. dieses Journal Bd. LIX, sowie *Kirchhoff-Planck*, Vorlesungen über Electricität und Magnetismus, 6. Vorlesung.

Richtung der Centrallinie $O_1 O_2$ bildet; ferner mit h die electrische Dichtigkeit in irgend einem Punkte der Oberfläche der Kugel K_1, dessen Radius vector $\varrho = a$ der Winkel ϑ entsprechen möge, und setzen noch

$$\mu = \cos\vartheta, \qquad \lambda = \cos^2\tfrac{1}{2}\vartheta,$$

$$\omega = (c^2 - a^2 + b^2) : 2ac, \qquad \xi = \omega - \sqrt{\omega^2 - 1}, \qquad q^2 = (\xi c - a) : b = b : \left(\frac{c}{\xi} - a\right).$$

Setzt man dann abkürzend

$$(1.) \qquad \psi(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_{2n}}{(1 - \alpha_{2n}\lambda)^{\frac{3}{2}}},$$

worin bedeuten

$$(2.) \qquad M_{2n} = \frac{(1-\xi)^2}{1+\xi} \frac{1 + \xi q^{4n}}{(1 - \xi q^{4n})^2} q^{2n},$$

$$(3.) \qquad \alpha_{2n} = \frac{4\xi}{(1+\xi)^2} \frac{(1 - q^{4n})(1 - \xi^2 q^{4n})}{(1 - \xi q^{4n})^2},$$

so hat man

$$(4.) \qquad 4\pi ah - A = A\psi(\xi) - B\psi\left(\frac{1}{\xi}\right).$$

Diese einfachen Gleichungen enthalten die allgemeine Lösung des Problems der Vertheilung der Electricität auf zwei leitenden Kugeln. Der Beweis lässt sich in folgender Art führen.

Nach ***Kirchhoff*** kann man das Potential $(V_i)_{\mu=1}$ der Electricität, welche sich auf der Kugel K_1 befindet, bezüglich eines Punktes der Centrallinie $O_1 O_2$, dessen (in der Richtung nach dem Punkte O_2 hin gemessener) Abstand vom Mittelpunkte O_1 gleich ϱ sei, nach folgender Gleichung berechnen:

$$(5.) \qquad (V_i)_{\mu=1} = A + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A s_{2n}}{1 - \frac{\varrho}{a} t_{2n}} - \frac{B u_{2n}}{1 - \frac{\varrho}{a} v_{2n}} \right),$$

worin bedeuten

$$(6.) \qquad s_{2n} = (1 - \xi^2) \frac{q^{2n}}{1 - \xi^2 q^{4n}}, \qquad (8.) \qquad t_{2n} = \xi \frac{1 - q^{4n}}{1 - \xi^2 q^{4n}},$$

$$(7.) \qquad u_{2n} = \frac{1 - \xi^2}{\xi} \frac{q^{2n}}{1 - q^{4n}}, \qquad (9.) \qquad v_{2n} = \xi \frac{1 - \frac{q^{4n}}{\xi^2}}{1 - q^{4n}}.$$

Schliesst man zunächst den Fall aus, dass die beiden Kugeln unbe-

grenzt einander genähert werden*), so sind die Grössen ξ und q und daher auch $\frac{q^2}{\xi} = \frac{b}{c - a\xi}$ (weil $b < c - a$ und um so mehr $< c - a\xi$) positive echte Brüche; es ist also auch $\frac{q^{4n}}{\xi^2}$ ein positiver echter Bruch und grösser als q^{4n}.

Die beiden Grössen t_{2n} und v_{2n} sind daher positive echte Brüche und kleiner als ξ.

Entwickelt man nun die beiden Glieder des in Gleichung (5.) vorkommenden Summenausdrucks nach Potenzen von $\frac{\varrho}{a}$, so gelangt man zu einer Gleichung von der Form

$$(10.) \qquad (V_i)_{\mu=1} = A + \sum_{\nu=0}^{\infty} (A k_\nu - B l_\nu) \left(\frac{\varrho}{a}\right)^\nu,$$

worin wieder

$$(11.) \qquad k_\nu = \sum_{n=1}^{\infty} s_{2n} t_{2n}^\nu, \qquad (12.) \qquad l_\nu = \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n} v_{2n}^\nu.$$

Leicht lässt sich nachweisen, dass die Coefficienten k_ν und l_ν angebbare positive Werthe haben, dass sie sich mit wachsendem Index ν mehr und mehr der Null nähern.

Für die Potentiale V_i und V_a eines inneren bezw. eines äusseren Punktes (ϱ, ϑ) der Kugel K_1 erhält man somit die Ausdrücke

$$(13.) \qquad V_i = A P_0 + \sum_{\nu=0}^{\infty} (A k_\nu - B l_\nu) P_\nu \left(\frac{\varrho}{a}\right)^\nu,$$

$$(14.) \qquad V_a = A P_0 \frac{a}{\varrho} + \sum_{\nu=0}^{\infty} (A k_\nu - B l_\nu) P_\nu \left(\frac{a}{\varrho}\right)^{\nu+1},$$

worin P_ν die Kugelfunction $P_\nu(\cos\vartheta)$ bedeutet.

Nun berechnet man nach bekanntem Satze die electrische Dichtigkeit h aus

$$4\pi h = \left[\frac{\partial V_i}{\partial \varrho}\right]_{\varrho=a} - \left[\frac{\partial V_a}{\partial \varrho}\right]_{\varrho=a}.$$

---

*) Nähern sich die beiden Kugeln mehr und mehr, so nähert sich c dem Werthe $a + b$; daher nähern sich die Grössen

$$\omega = 1 + \frac{[c - (a+b)](c - a + b)}{2ac},$$

$$\xi = \omega - \sqrt{\omega^2 - 1},$$

$$q^2 = 1 + \frac{\xi}{b}[c - (a+b)] + \frac{a+b}{b}(\xi - 1)$$

sämmtlich dem Werthe 1.

Man kann schreiben

$$\left[\frac{\partial V_i}{\partial \varrho}\right]_{\varrho=a} = \frac{1}{a}\sum_{\nu=0}^{\infty}(Ak_\nu - Bl_\nu)\,\nu P_\nu,$$

$$\left[\frac{\partial V_a}{\partial \varrho}\right]_{\varrho=a} = -\frac{1}{a}\left[AP_0 + \sum_{\nu=0}^{\infty}(Ak_\nu - Bl_\nu)(\nu+1)P_\nu\right].$$

Daher wird

$$4\pi ah = AP_0 + \sum_{\nu=0}^{\infty}(Ak_\nu - Bl_\nu)(2\nu+1)P_\nu.$$

Setzt man hierin nach (11.) und (12.) wieder

$$k_\nu = s_2 t_2^\nu + s_4 t_4^\nu + \cdots,$$

$$l_\nu = u_2 v_2^\nu + u_4 v_4^\nu + \cdots,$$

so hat man etwas ausführlicher

$$4\pi ah = AP_0 + \sum_{\nu=0}^{\infty}[A(s_2 t_2^\nu + s_4 t_4^\nu + \cdots) - B(u_2 v_2^\nu + u_4 v_4^\nu + \cdots)](2\nu+1)P_\nu.$$

Ordnet man hierin nach den Grössen s_{2n} und u_{2n}, so erhält man

$$4\pi ah = A\left[P_0 + s_2\sum_{\nu=0}^{\infty}(2\nu+1)P_\nu t_2^\nu + s_4\sum_{\nu=0}^{\infty}(2\nu+1)P_\nu t_4^\nu + \cdots\right]$$

$$- B\left[u_2\sum_{\nu=0}^{\infty}(2\nu+1)P_\nu v_2^\nu + u_4\sum_{\nu=0}^{\infty}(2\nu+1)P_\nu v_4^\nu + \cdots\right].$$

Es erscheinen hier Reihen von der Form

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(2\nu+1)P_\nu z^\nu,$$

in welchem Ausdrucke also z die sämmtlichen Werthe t_{2n} und v_{2n} ($n = 1$ bis ∞) annehmen kann. Die Grösse z stellt somit einen positiven echten Bruch dar.

Unter diesen Verhältnissen weist man leicht nach, dass*)

$$(15.)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty}(2\nu+1)P_\nu z^\nu = \frac{1-z^2}{(1-2\mu z+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

---

*) Differentiirt man nämlich in

$$(1-2\mu z+z^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty}P_\nu z^\nu,$$

auf beiden Seiten nach z und multiplicirt dann mit $2z$, so folgt

$$(2\mu z - 2z^2)(1-2\mu z+z^2)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty}2\nu P_\nu z^\nu.$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen ergiebt sich die obige Beziehung.

Die obige Gleichung lässt sich demnach schreiben

$$(16.) \qquad 4\pi ah = A\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} s_{2n} \frac{1-t_{2n}^2}{(1-2\mu t_{2n}+t_{2n}^2)^{\frac{3}{2}}}\right] - B\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-v_{2n}^2}{(1-2\mu v_{2n}+v_{2n}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Setzt man in dieser Gleichung

$$\mu = 2\lambda - 1,$$

sodass, da $\mu = \cos\vartheta$,

$$\lambda = \cos^2\tfrac{1}{2}\vartheta$$

ist, so geht sie in die Form über

$$(17.) \qquad 4\pi ah = A\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_{2n}}{(1-\alpha_{2n}\lambda)^{\frac{3}{2}}}\right] - B\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_{2n}}{(1-\beta_{2n}\lambda)^{\frac{3}{2}}},$$

worin bedeuten

$$\alpha_{2n} = \frac{4t_{2n}}{(1+t_{2n})^2}, \qquad M_{2n} = \frac{1-t_{2n}}{(1+t_{2n})^2} s_{2n},$$

$$\beta_{2n} = \frac{4v_{2n}}{(1+v_{2n})^2}, \qquad N_{2n} = \frac{1-v_{2n}}{(1+v_{2n})^2} u_{2n}.$$

Setzt man in diesen Gleichungen aus (6.) bis (9.) für s_{2n}, t_{2n}, u_{2n}, v_{2n} deren Werthe ein, so findet man schliesslich

$$(18.) \qquad \alpha_{2n} = \frac{4\xi}{(1+\xi)^2} \frac{(1-q^{4n})(1-\xi^2 q^{4n})}{(1-\xi q^{4n})^2},$$

$$(19.) \qquad \beta_{2n} = \frac{4\xi}{(1+\xi)^2} \frac{\left(1-q^{4n}\right)\left(1-\frac{q^{4n}}{\xi^2}\right)}{\left(1-\frac{q^{4n}}{\xi}\right)^2},$$

$$(20.) \qquad M_{2n} = \frac{(1-\xi)^2}{1+\xi} \frac{1+\xi q^{4n}}{(1-\xi q^{4n})^2} q^{2n},$$

$$(21.) \qquad N_{2n} = \frac{(1-\xi)^2}{1+\xi} \frac{1+\frac{q^{4n}}{\xi}}{\left(1-\frac{q^{4n}}{\xi}\right)^2} \frac{q^{2n}}{\xi}.$$

Die Ausdrücke für β_{2n} und N_{2n} können offenbar aus den Ausdrücken α_{2n} und M_{2n} dadurch gebildet werden, dass man in den letzteren ξ mit $\frac{1}{\xi}$ vertauscht.

Setzt man also in (17.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_{2n}}{(1-\alpha_{2n}\lambda)^{\frac{3}{2}}} = \psi(\xi),$$

so wird

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_{2n}}{(1-\beta_{2n}\lambda)^{\frac{3}{2}}} = \psi\left(\frac{1}{\xi}\right),$$

womit die im Eingang gegebenen Gleichungen bewiesen sind.

Specialisirung für den Fall, dass die beiden Kugeln sich berühren.

Poisson gelangt zu Gleichungen für diesen Specialfall mittelst einer besonderen Untersuchung, der ein Theil seines ersten „Mémoire sur la distribution de l'électricité" gewidmet ist. Es soll hier gezeigt werden, wie sich die betreffenden Relationen unmittelbar aus den obigen allgemeinen Gleichungen herleiten lassen.

Eliminirt man aus den beiden im Eingang angeführten, zur Berechnung der Grösse q^2 dienenden Gleichungen die Grösse a, so entsteht für $1-\xi$ die Substitutionsgleichung

$$1-\xi = \frac{b\xi}{cq^2}\,\frac{1-q^4}{1+\xi},$$

welche auch dann ihre bestimmte Bedeutung nicht verliert, wenn sich ξ und q unbegrenzt dem Werthe 1 nähern, d. h. wenn die beiden Kugeln mehr und mehr genähert werden.

Mit Verwendung dieser Gleichung lassen sich die Beziehungen (18.) bis (21.) nach einigen Umgestaltungen in die Formen bringen

$$\alpha_{2n} = 4\,\frac{c}{b}\,q^2\,\sigma_{2n}\,\frac{\frac{c}{b}\,\xi\,q^2\sigma_{2n}+1}{\left[\frac{c}{b}(1+\xi)\,q^2\sigma_{2n}+1\right]^2}, \tag{22.}$$

$$\beta_{2n} = 4\,\frac{c}{b}\,q^2\,\sigma_{2n}\,\frac{\frac{c}{b}\,\frac{q^2}{\xi}\,\sigma_{2n}-1}{\left[\frac{c}{b}(1+\xi)\,\frac{q^2}{\xi}\,\sigma_{2n}-1\right]^2}, \tag{23.}$$

$$M_{2n} = q^{2n}\,\frac{1+\xi q^{4n}}{1+\xi}\,\frac{1}{\left[\frac{c}{b}(1+\xi)\,q^2\,\sigma_{2n}+1\right]^2}, \tag{24.}$$

$$N_{2n} = \frac{q^{2n}}{\xi}\,\frac{1+\frac{q^{4n}}{\xi}}{1+\xi}\,\frac{1}{\left[\frac{c}{b}(1+\xi)\,\frac{q^2}{\xi}\,\sigma_{2n}-1\right]^2}, \tag{25.}$$

worin bedeutet

$$\sigma_{2n} = \frac{1-q^{4n}}{1-q^4}. \tag{26.}$$

Werden die beiden Kugeln mehr und mehr einander genähert, so nähern sich in diesen Gleichungen die Grössen ξ und q dem Werthe 1, die Grösse c dem Werthe $a+b$.

Den Grenzwerth, welchem sich die Grösse σ_{2n} nähert, findet man leicht, wenn man

$$q^4 = 1-\varepsilon$$

setzt, in welcher Beziehung also, bei immer grösser werdender Annäherung der Kugeln ε schliesslich eine sehr kleine positive Grösse darstellen wird.

Man kann schreiben

$$\sigma_{2n} = \frac{1-(1-\varepsilon)^n}{\varepsilon}.$$

Für unbegrenzt abnehmende Werthe von ε ist aber

$$\lim \frac{1-(1-\varepsilon)^n}{\varepsilon} = n.$$

Wenn also die beiden Kugeln mehr und mehr einander genähert werden, so werden sich die Grössen α_{2n}, β_{2n}, M_{2n}, N_{2n} gewissen Grenzwerthen nähern, die wir erhalten, wenn wir in den Gleichungen (22.) bis (25.) setzen

$$\xi = q = 1, \qquad c = a+b, \qquad \sigma_{2n} = n.$$

Schreiben wir noch abkürzend

$$\gamma = \frac{a+b}{b},$$

so erhalten wir auf diese Art für den Fall der Berührung zweier Kugeln K_1 und K_2 von den Radien a und b die Beziehungen

$$\alpha_{2n} = 1-(2n\gamma+1)^{-2}, \qquad M_{2n} = (2n\gamma+1)^{-2},$$
$$\beta_{2n} = 1-(2n\gamma-1)^{-2}, \qquad N_{2n} = (2n\gamma-1)^{-2}.$$

Wenn von Berührungselectricität abgesehen wird, so ist als herstellbar nur der Fall zu betrachten $A = B$ (Gleichheit der Potentiale auf beiden Kugeln). Für diesen Fall erhält man durch Einsetzung der obigen Werthe für α_{2n}, β_{2n}, M_{2n}, N_{2n} in die allgemeine Gleichung (17.):

$$(27.) \qquad \frac{4\pi ah}{A} = 1-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n\gamma-1)^2\left\{1-\left[1-\frac{1}{(2n\gamma-1)^2}\right]\lambda\right\}^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(2n\gamma+1)^2\left\{1-\left[1-\frac{1}{(2n\gamma+1)^2}\right]\lambda\right\}^{\frac{3}{2}}}\right].$$

Wir bringen diese Gleichung in eine noch etwas einfachere Form, indem wir setzen

$$\lambda = \frac{\tau}{1+\tau},$$

woraus für τ folgt

$$\tau = \frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{\cos^2 \frac{1}{2}\vartheta}{1-\cos^2 \frac{1}{2}\vartheta} = \cot^2 \frac{1}{2}\vartheta.$$

Dann hat man

$$(28.) \quad \frac{4\pi ah}{A} = 1-(1+\tau)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2n\gamma-1}{[(2n\gamma-1)^2+\tau]^{\frac{3}{2}}} - \frac{2n\gamma+1}{[(2n\gamma+1)^2+\tau]^{\frac{3}{2}}} \right].$$

Haben die beiden Kugeln gleichen Radius ($a = b$), so wird $\gamma = \frac{a+b}{b} = 2$; dann ist sehr einfach

$$(29.) \quad \frac{4\pi ah}{A(1+\tau)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(1^2+\tau)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{(3^2+\tau)^{\frac{3}{2}}} + \frac{5}{(5^2+\tau)^{\frac{3}{2}}} - \cdots$$

Mit den obigen, leicht sich vollziehenden Specialisirungen der Gleichung (4.) dürfte das allgemeine Problem: die electrische Dichtigkeit h in einfacher Art durch eine Function des Ortes auf der Kugelfläche darzustellen, nach jeder Richtung hin als gelöst betrachtet werden können.

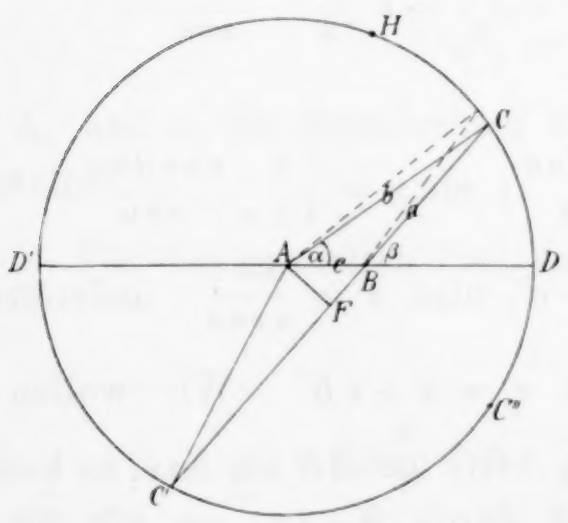
Untersuchungen über die *Landen*sche Transformation.

(Von Herrn *P. Kokott* in Sagan.)

Im Folgenden soll nach einer kurzen Einleitung, in welcher die elliptischen Functionen in einer von den bisherigen Formen abweichenden Art am Kreise dargestellt werden, die *Landen*sche Transformation sich als die Abbildung zweier Kreise auf einander ergeben. Sodann wird durch Einführung des in der elementaren Dreieckslehre unter den Namen des *Apollonius* bekannten Kreises zunächst eine neue Deutung der Formeln jener Transformation gewonnen und gleichzeitig die Kreisdarstellung der elliptischen Functionen mit der durch den *Apollon*ischen Kreis und mit der allgemein bekannten *Halphen*schen Darstellung in Verbindung gebracht.

§ 1.

Darstellung der elliptischen Functionen am Kreise.



In einem Kreise, dessen Mittelpunkt A und dessen Radius b sei, ist ein fester Durchmesser $D'D$ gezogen und

$$AB = c < b$$

abgetragen. Ein beliebiger Punkt C des Kreises ist mit B verbunden. $BC = a$ nimmt je nach Lage des Punktes C alle Werthe zwischen $b-c$ und $b+c$ an. Bedeutet Δ die Fläche des Dreiecks ABC, so ist

$$\Delta = \sqrt{\left[\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] \cdot \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-c}{2}\right)^2\right]} = i\,\frac{b^2-c^2}{4}\,\sqrt{(1-y^2)\cdot(1-z^2y^2)},$$

wobei $y = \frac{a}{b-c}$ und $z = \frac{b-c}{b+c}$ ist. Setzt man

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\cdot(1-z^2y^2)}} = u,$$

so ist $y = sn(u, z)$ d. h. $a = (b-c)\,snu$. Die Fläche Δ kann dargestellt werden durch $i\,\frac{b^2-c^2}{4}\,cnu\cdot dnu$. Die Variable u nimmt auf dem Kreise alle Werthe zwischen K und $K+2iK'$ an; für D ist $u = K$, für D' $u = K+iK'$ Bezeichnet α den Winkel CAB, so ist

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{4bc}} = i\,\frac{b-c}{2\sqrt{bc}}\,\sqrt{1-\frac{a^2}{(b-c)^2}} = i\,\frac{b-c}{2\sqrt{bc}}\,cnu$$

Da $z = \frac{b-c}{b+c}$ ist, so ist

$$z' = \sqrt{1-\frac{(b-c)^2}{(b+c)^2}} = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c},$$

also

$$\frac{b-c}{2\sqrt{bc}} = \frac{z}{z'};$$

folglich

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{iz}{z'}\,cnu \qquad \text{oder} \qquad cnu = -\,\frac{iz'}{z}\,\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Ebenso ergiebt sich

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}} = \frac{b+c}{2\sqrt{bc}}\,\sqrt{1-z^2\,sn^2u} = \frac{1}{z'}\,dn\,u;$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = iz\,\frac{cnu}{dnu} = iz\,sn(K+u);\quad h_a = \frac{2F}{a} = i\,\frac{b+c}{2}\,\frac{cnu\,dnu}{snu};$$

$\sin\beta$ (β sei Aussenwinkel bei B)

$$= \frac{2F}{ac} = i\,\frac{b+c}{2c}\,\frac{cnu\,dnu}{snu} = \frac{i}{1-z}\,\frac{cnu\,dnu}{snu};\quad \sin\gamma = \frac{i}{1+z}\,\frac{cnu\,dnu}{snu}.$$

Verlängert man CB bis C', so ist $aa' = b^2-c^2$, also $a' = \frac{b-c}{z\,snu}$; andererseits $a' = (b-c)\,snu'$ folglich $snu' = \frac{1}{z\,snu}$ also $u' = u + iK'$. Wir wollen C' Gegenpunkt von C nennen. Dreht man $\triangle ABC$ um AB als Axe, so kommt C in die Lage von C''. Ist C bestimmt durch $K+ix$, so gilt für C''

$K+2iK'-ix$; für diesen Werth bleibt nämlich snu unverändert, während $cnu\,dnu$ nur negativ wird. C'' heisse Spiegelpunkt. Für H senkrecht über B ist Spiegelpunkt und Gegenpunkt identisch; also $K+2iK'-ix = K+ix+iK'$; d. h. $\frac{iK'}{2} = ix$; für den Punkt senkrecht unter B ist $u = K+\frac{3iK'}{2}$.

Wir wollen nunmehr die Frage untersuchen, wo der Punkt $K+ix+iy$ liegt, wenn $K+ix$ und $K+iy$ gegebene Punkte sind. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir den Strahl nach dem Punkt $K+ix$ von B aus mit m, nach $K+iy$ mit n, die Gegenstrahlen mit m' und n'; ferner den Centriwinkel, welchen der Radius nach $K+ix+iy$ mit dem festen Radius bildet mit M; dann ist

$$sn(2K+ix+iy) = \frac{cn(K+ix+iy)}{dn(K+ix+iy)}$$

$$= \frac{sn(K+ix)\,cn(K+iy)\,dn(K+iy)+sn(K+iy)\,cn(K+ix)\,dn(K+ix)}{1-\varkappa^2\,sn^2(K+ix)\,sn^2(K+iy)}.$$

Setzt man

$$sn(K+ix) = \frac{m}{b-c}, \qquad cn(K+ix)\,dn(K+ix) = \frac{4\Delta_m}{i(b^2-c^2)},$$

ebenso für das Argument $K+iy$, beachtet man ferner die Relation

$$\frac{cnu}{dnu} = -\frac{i}{\varkappa}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2},$$

so ergiebt sich

$$\frac{\mathrm{tg}\,\frac{M}{2}}{i\varkappa} = \frac{\frac{m}{b-c}\cdot\frac{4\Delta_m}{i(b^2-c^2)}+\frac{n}{b-c}\cdot\frac{4\Delta_n}{i(b^2-c^2)}}{1-\frac{\varkappa^2m^2n^2}{(b-c)^4}},$$

welche nach einigen Reductionen übergeht in

$$\mathrm{tg}\,\frac{M}{2} = \frac{2(b-c)(h_m+h_n)}{m'n'-mn},$$

wo h_m und h_n die Senkrechten von A auf die Sehnenabschnitte m und n darstellen.

Für den speciellen Fall, dass $iy = \frac{iK'}{2}$ ist, ist $h_n = c$, $m' = n' = \sqrt{b^2-c^2}$, also

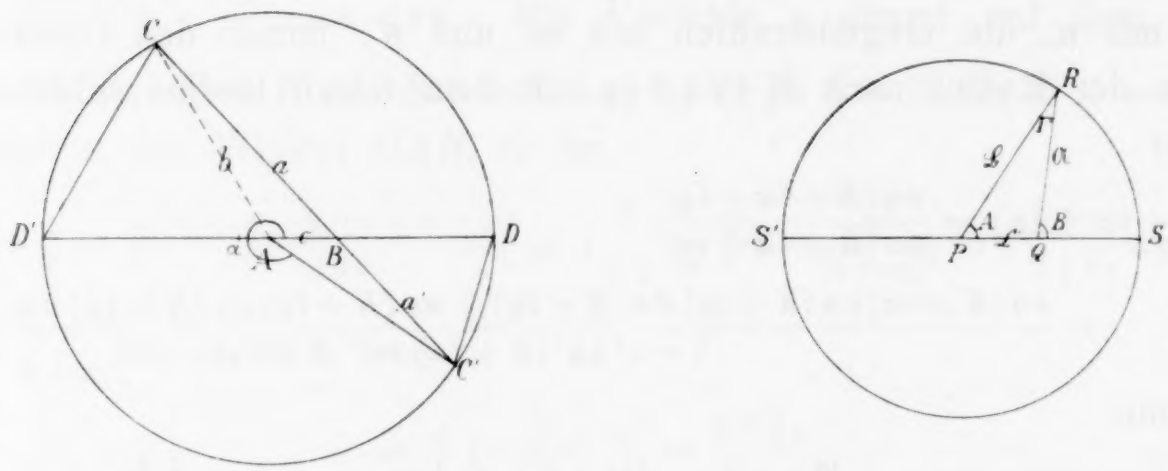
$$\mathrm{tg}\,\frac{M}{2} = \sqrt{\varkappa}\cdot\frac{(h_m+c)}{\frac{m'-m}{2}} = \frac{\sqrt{\varkappa}\left(\frac{h_m}{c}+1\right)}{\frac{m'-m}{2c}};$$

berücksichtigt man, dass $FB = \frac{m'-m}{2}$ ist, so ist

$$\operatorname{tg}\frac{M}{2} = \sqrt{\varkappa}\,\frac{(1+\sin\beta)}{\cos\beta} = \sqrt{\varkappa}\,\operatorname{tg}\left(45^0+\frac{\beta}{2}\right).$$

§ 2.

Abbildung zweier Kreise auf einander.



Zwei Kreise sollen nun in folgender Weise auf einander abgebildet werden: Man zeichne, um C abzubilden, a' und ziehe durch Q zu $C'D$ die Parallele; es ist hierbei vorausgesetzt, dass $DD' \parallel SS'$ ist. Die Lage des Punktes R hängt offenbar von der Wahl des Radius PS und des Stückes PQ ab. Ueber PS wollen wir so verfügen, dass eine Eigenschaft des Kreises A in möglichst einfacher Form auf P übertragen wird. In $\measuredangle BCD'$ ist $\sphericalangle D' = \frac{\alpha}{2}$ und $\sphericalangle D'CB = \frac{\alpha'-2R}{2} = \frac{\alpha'}{2} - R$; also verhält sich

$$\frac{a}{b+c} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{-\cos\frac{\alpha'}{2}}.$$

Da $\sphericalangle D = C = B$ ist, so ist im $\measuredangle PQR$ $\frac{QR}{PR} = \frac{\sin A}{-\cos\frac{\alpha'}{2}}$, also $\frac{a.PR}{(b+c)QR} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin A}$;

es empfiehlt sich also $PR = b+c$ oder noch besser $= \frac{b+c}{2}$ zu machen, so dass, wenn man QR mit $\mathfrak{A}$ bezeichnet wird, $2\,\mathfrak{A}\sin\frac{\alpha}{2} = a\cdot\sin A$ ist. Was nun $PQ = \mathfrak{C}$ anbetrifft, so sei Folgendes bemerkt. Will man Punkt D' ab-

bilden, so ist $C'D$ die Tangente an den Kreis, die Parallele im anderen Kreise steht dann in B senkrecht; es ist also der Punkt $K+iK'$ abgebildet auf $L+\frac{iL'}{2}$, wenn L und L' die analogen Grössen für den zweiten Kreis bedeuten. Einer Vermehrung des Argumentes K um iK' entspricht also eine solche von $\frac{iL'}{2}$. Diese Eigenschaft soll auf jeden Punkt ausgedehnt werden, also dem Argumente $u+iK'$ das Argument $v+\frac{iL'}{2}$ entsprechen. Im zweiten Kreise muss dann die Formel bestehen

$$\operatorname{tg}\frac{M}{2}=\sqrt{l}\operatorname{tg}\left(45^0+\frac{B}{2}\right),$$

wo M den Winkel nach dem Punkte $v+\frac{iL'}{2}$ bedeutet und $l=\frac{\mathfrak{B}-\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}+\mathfrak{C}}$ ist. Da $\frac{B}{2}=\frac{\alpha'}{4}-45^0$ ist, so erhält man

$$\operatorname{tg}\frac{M}{2}=\sqrt{l}\operatorname{tg}\frac{\alpha'}{4};$$

M' und α' sind correspondirende Centriwinkel, die Formel gilt also allgemein

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{l}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}.$$

Da

$$\sin A=\frac{2\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}$$

ist, so geht die Formel $2\,\mathfrak{A}\sin\frac{\alpha}{2}=a\sin A$ über in

$$\frac{a\cdot\sqrt{l}}{1+l\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{4}}=2\,\mathfrak{A}\cos^2\frac{\alpha}{4};$$

setzt man hierin $\alpha=0$, so ist

$$a\sqrt{l}=2\,\mathfrak{A};$$

für diesen speciellen Fall ist $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}-\mathfrak{C}$ und $a=b-c$; und, weil $\mathfrak{B}=\frac{b+c}{2}$ ist, so erhält man

$$(b-c)\sqrt{\frac{\mathfrak{B}-\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}+\mathfrak{C}}}=2\,(\mathfrak{B}-\mathfrak{C})\quad\text{oder}\quad\left(\frac{b-c}{4}\right)^2=\left(\frac{b+c}{4}\right)^2-\mathfrak{C}^2,$$

d. h. $PQ = \sqrt{bc}$; der Modul l ist also gleich

$$\frac{\frac{b+c}{2} - \sqrt{bc}}{\frac{b+c}{2} + \sqrt{bc}} = \frac{1-\varkappa'}{1+\varkappa'}.$$

Es ist nunmehr leicht, zwischen einem beliebigen u im ersten Kreise und dem entsprechenden v im anderen eine Relation herzustellen. Es ist nämlich $a = (b-c)\,snu$, also $da = (b-c)\,cnu\,dnu\,du$; andererseits ist da, wie aus der Figur des § 2 leicht hervorgeht, gleich

$$bd\alpha \sin\gamma = \frac{b \cdot d\alpha \cdot i\,cnu\,dnu}{(1+\varkappa)\,snu};$$

also ist

$$\frac{bid\alpha}{1+\varkappa} = a\,du;$$

ebenso im anderen Kreise

$$\frac{\frac{b+c}{2} \cdot id\,A}{1+l} = \mathfrak{A}\,dv;$$

folglich

$$\frac{dv}{du} = \frac{a(b+c)(1+\varkappa)\,dA}{2b \cdot \mathfrak{A} \cdot (1+l)\,d\alpha},$$

oder, weil $1+\varkappa = \frac{2b}{b+c}$ ist,

$$\frac{dv}{du} = \frac{a\,dA}{(1+l)\,\mathfrak{A}\,d\alpha};$$

aus $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{l}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$ folgt

$$\frac{dA}{d\alpha} = \frac{\cos^2\frac{A}{2}\sqrt{l}}{2\cos^2\frac{\alpha}{4}}$$

und, da $a \sin A = 2\,\mathfrak{A} \sin\frac{\alpha}{2}$ ist,

$$\frac{a \cdot dA}{\mathfrak{A}\,d\alpha} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{A}{2}\sqrt{l}}{2\sin A\cos^2\frac{\alpha}{4}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}\cdot\sqrt{l}}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}} = 1;$$

folglich ist

$$\frac{dv}{du} = \frac{1}{1+l} = \frac{1+\varkappa'}{2};$$

demnach besteht die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-l^2z^2)}} = \frac{1+\varkappa'}{2}\,\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\varkappa^2y^2)}},$$

und da dem Anfangspunkte des einen Kreises auch der des anderen entspricht, ist $v = \frac{1+\varkappa'}{2}\,u$. Das Abbildungsverfahren giebt nun ohne weiteres ein Integral in anderer Form; es ist nämlich $\sin B = -\cos\frac{\alpha'}{2}$; nun ist $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\varkappa'}\,dn\,u$, also $\cos\frac{\alpha'}{2} = \frac{1}{\varkappa'}\,dn\,(u+iK') = -\frac{i}{\varkappa' cn\,u}$; ferner

$$\sin B = \frac{i}{1-l}\,\frac{cn\,v\,dn\,v}{sn\,v}, \quad \text{und da} \quad \varkappa' = \frac{1-l}{1+l} \text{ ist,}$$

ergiebt sich $\frac{tn\,v}{dn\,v} = \frac{1}{1+l}\,tn\,u$, d. h. eine der bekannten Formeln der *Landen*schen Transformation. Es ist leicht, andere Formeln zwischen u und v herzustellen. Es ist nämlich

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{il\,cn\,v}{dn\,v}, \quad \text{also} \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} = \frac{\sin\frac{\alpha}{4}}{\cos\frac{\alpha}{4}} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\frac{\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{\varkappa'-dn\,u}{\varkappa'+dn\,u}};$$

also

$$\frac{cn\,v}{dn\,v} = \sqrt{\frac{1+\varkappa'}{1-\varkappa'}}\,\sqrt{\frac{dn\,u-\varkappa'}{dn\,u+\varkappa'}}.$$

Nach dem umgewandelten Cosinussatze ist

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b-c} = \frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{\varkappa^2+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

Wendet man diese Formel auf den zweiten Kreis an, so ergiebt sich unter Berücksichtigung von $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{l}\,\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$;

$$sn\,v = \frac{1}{\sqrt{l}}\sqrt{\frac{l+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{4}}{1+l\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{4}}}$$

oder, da $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} = \sqrt{\frac{\varkappa'-dn\,u}{\varkappa'+dn\,u}}$ ist,

$$sn\,v = \sqrt{\frac{1+\varkappa'}{1-\varkappa'}}\,\sqrt{\frac{1-dn\,u}{1+dn\,u}}.$$

Setzt man in der Gleichung $\frac{tnv}{dnv} = \frac{1}{1+l}\, tnu$ für snv z, für snu y ein, so erhält man

$$\frac{z}{\sqrt{1-z^2 \cdot 1-l^2z^2}} = \frac{1}{(1+l)} \frac{y}{\sqrt{1-y^2}},$$

aus welcher sich leicht $\varkappa y = \frac{\sqrt{l}\, z}{1+lz^2}$ ergiebt. Man kann hieraus noch eine andere Eigenschaft der Abbildung erkennen, wenn man $\frac{a}{b-c}$ für y, für z $\frac{\mathfrak{A}}{\frac{b+c}{2} - \sqrt{bc}}$ setzt. Es wird dann

$$\varkappa \frac{a}{b-c} = \frac{4\mathfrak{A} \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \cdot \frac{1}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2}}{1 + \frac{4\mathfrak{A}^2(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2(\sqrt{b}-\sqrt{c})^4}};$$

daraus folgt

$$\frac{a}{b+c} = \frac{\frac{4\mathfrak{A}}{b-c}}{1+\frac{4\mathfrak{A}^2}{(b-c)^2}} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b^2-c^2} = \frac{4\mathfrak{A}}{(b-c)^2+4\mathfrak{A}^2};$$

nun ist $b^2-c^2 = aa'$ und $\left(\frac{b-c}{2}\right)^2 = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}'$, also erhält man $a' = \mathfrak{A} + \mathfrak{A}'$. Man kann demnach einander entsprechende Punkte finden, indem man a' in den zweiten Kreis als Sehne einträgt und an den so bestimmten concentrischen Kreis durch Q die Tangente legt.

Der Kreis A kann selbst wieder als Abbildung eines anderen Kreises angesehen werden; dann ist der Radius von A das arithmetische Mittel. AB das geometrische Mittel zweier Grössen m und n, von denen also

$$m = b + \sqrt{b^2-c^2}, \qquad n = b - \sqrt{b^2-c^2}$$

ist; der zu jenem Kreise gehörige Modul $\frac{m-n}{m+n}$ ist dann gleich

$$\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{b} = \sqrt{1-\frac{c^2}{b^2}},$$

und da $\frac{c}{b} = \frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}$ ist, so ist $\lambda = \frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa}$; nun ist $a = (b-c)\, snu$, $a' = \frac{(b-c)}{\varkappa\, snu}$

und $\mathfrak{A}_1' = \frac{m-n}{\lambda sn(v_1, \lambda)}$; die Formel $a' = \mathfrak{A} + \mathfrak{A}'$ wird dann

$$sn(v_1, \lambda) = \frac{(1+\varkappa)\, sn\, u}{1+\varkappa\, sn^2 u}.$$

§ 3.

Herleitung der *Landen*schen Transformation aus dem Additionstheorem.

Wir haben zu Anfang gesehen, dass der Strahl nach dem Punkte $K+ix+iy$ mit dem festen Radius einen Winkel bildet, welcher bestimmt ist durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \frac{M}{2} = \frac{2(b-c)(h_m + h_n)}{m'n' - mn}.$$

Denkt man sich statt des Punktes $K+iy$ den Spiegelpunkt $K + 2iK' - iy$, so ändert sich die Formel nur dadurch, dass h_n negativ wird, also ist

$$\operatorname{tg} \frac{N}{2} = \frac{2(b-c)(h_m - h_n)}{m'n' - mn};$$

N bedeutet den Winkel nach dem Punkte $K+ix+2iK'-iy$. Nun ist

$$\operatorname{tg} \frac{M}{2} = i\varkappa\, sn(u+v); \quad \operatorname{tg} \frac{N}{2} = i\varkappa\, sn(2K + ix - iy) = -i\varkappa\, sn(u-v),$$

wenn $u = K+ix$, $v = K+iy$ gesetzt wird. Also

$$\operatorname{tg} \frac{M}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{N}{2} = \varkappa^2\, sn(u+v)\, sn(u-v)$$

oder

$$\varkappa\, sn(u+v)\, sn(u-v) = \frac{4(b^2-c^2)(h_m^2 - h_n^2)}{(m'n' - mn)^2}.$$

Die Figur lehrt nun, dass

$$h_m^2 = b^2 - \left(\frac{m+m'}{2}\right)^2 \quad \text{und} \quad h_n^2 = b^2 - \left(\frac{n+n'}{2}\right)^2$$

ist; also entsteht, da überdies $nn' = mm'$ ist,

$$\varkappa\, sn(u+v)\, sn(u-v) = \frac{(b^2-c^2)\{n^2 + n'^2 - m^2 - m'^2\}}{(m'n' - mn)^2}.$$

Multiplicirt man mit b^2-c^2 in die Klammer hinein, und zwar einmal als mm', das andere Mal als nn', so erhält man

$$-\varkappa\, sn(u+v)\, sn(u-v) = \frac{n^2 mm' + n'^2 mm' - m^2 nn' - m'^2 nn'}{(m'n' - mn)^2} = \frac{mn' - m'n}{m'n' - mn}.$$

In meiner Abhandlung über „die geometrische Deutung des Additions-

theorems“ im Archiv für Math. und Physik habe ich nun bewiesen, dass

$$\frac{m'n'-mn}{4bc} = \sin\frac{\mu'}{2}\sin\frac{\nu'}{2}\cos\frac{\mu}{2}\cos\frac{\nu}{2} - \sin\frac{\mu}{2}\sin\frac{\nu}{2}\cos\frac{\mu'}{2}\cos\frac{\nu'}{2}$$

ist; hier bedeutet μ den zum Strahl m gehörigen Centriwinkel, μ' den zum Gegenstrahl m' gehörigen, natürlich überstumpfen Winkel; ν und ν' beziehen sich auf n.

Nun geht der Ausdruck $mn'-m'n$ aus $m'n'-mn$ dadurch hervor, dass man den Gegenstrahl m' in m verwandelt, den Strahl m in den Gegenstrahl m', dadurch geht μ in μ' und μ' in $4R+\mu$ über; also ist

$$\frac{mn'-m'n}{4bc} = -\sin\frac{\mu}{2}\sin\frac{\nu'}{2}\cos\frac{\mu'}{2}\cos\frac{\nu}{2} + \sin\frac{\mu'}{2}\sin\frac{\nu}{2}\cos\frac{\mu}{2}\cos\frac{\nu'}{2};$$

folglich

$$\frac{mn'-m'n}{m'n'-mn} = \frac{-\sin\frac{\mu}{2}\cos\frac{\mu'}{2}\sin\frac{\nu'}{2}\cos\frac{\nu}{2} + \sin\frac{\mu'}{2}\cos\frac{\mu}{2}\sin\frac{\nu}{2}\cos\frac{\nu'}{2}}{\sin\frac{\mu'}{2}\sin\frac{\nu'}{2}\cos\frac{\mu}{2}\cos\frac{\nu}{2} - \sin\frac{\mu}{2}\sin\frac{\nu}{2}\cos\frac{\mu'}{2}\cos\frac{\nu'}{2}}.$$

Kürzt man den Bruch rechts mit

$$\sin\frac{\mu'}{2}\sin\frac{\nu'}{2}\cos\frac{\mu}{2}\cos\frac{\nu}{2},$$

so entsteht

$$\frac{mn'-m'n}{m'n'-mn} = \frac{-\frac{\operatorname{tg}\frac{\mu}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\mu'}{2}} + \frac{\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\nu'}{2}}}{1-\frac{\operatorname{tg}\frac{\mu}{2}\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\mu'}{2}\operatorname{tg}\frac{\nu'}{2}}}.$$

Da $\operatorname{tg}\frac{\mu}{2} = i\varkappa sn(K+u)$ und $\operatorname{tg}\frac{\mu'}{2} = i\varkappa sn(K+iK'+u)$ ist, so ist stets $\operatorname{tg}\frac{\mu}{2}\operatorname{tg}\frac{\mu'}{2} = -\varkappa$.

Deshalb erhalten wir

$$\varkappa sn(u+v)sn(u-v) = \frac{\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\mu}{2}}{\varkappa} - \frac{\operatorname{tg}^2\frac{\nu}{2}}{\varkappa}}{1-\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\mu}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\nu}{2}}{\varkappa^2}} = \frac{\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\mu}{2}}{\sqrt{\varkappa}} + \frac{\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}}{\sqrt{\varkappa}}\right)\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\mu}{2}}{\sqrt{\varkappa}} - \frac{\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}}{\sqrt{\varkappa}}\right)}{\left(1-\frac{\operatorname{tg}\frac{\mu}{2}\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}}{\varkappa}\right)\left(1+\frac{\operatorname{tg}\frac{\mu}{2}\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}}{\varkappa}\right)}.$$

Setzt man jetzt

$$\operatorname{tg}\frac{\mu}{2} = \sqrt{\varkappa}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}\frac{\nu}{2} = \sqrt{\varkappa}\operatorname{tg}\frac{\psi}{4},$$

d. h. sieht man den gegebenen Kreis mit den Winkeln μ und ν als eine durch eine *Landen*sche Transformation entstandene Abbildung eines anderen Kreises an, dessen Variablen u_1 und v_1 und dessen Modul λ sei, so erhält man

$$\lambda\, sn(u_1+v_1)\, sn(u_1-v_1) = \operatorname{tg}\frac{\varphi+\psi}{4}\cdot\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{4}$$

oder

$$\frac{1+\lambda\, sn(u_1+v_1)\, sn(u_1-v_1)}{1-\lambda\, sn(u_1+v_1)\, sn(u_1-v_1)} = \frac{\cos\frac{\psi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}};$$

da nach § 1

$$\cos\frac{\psi}{2} = \frac{1}{\varkappa'}\, dn\, v \quad \text{und} \quad \cos\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\varkappa'}\, dn\, u$$

ist, so erhält man schliesslich

$$\frac{1+\lambda\, sn(u_1+v_1)\, sn(u_1-v_1)}{1-\lambda\, sn(u_1+v_1)\, sn(u_1-v_1)} = \frac{dn\, v}{dn\, u}.$$

Diese Formel ist ein allgemeiner Ausdruck der *Landen*schen Transformation, der die vorher entwickelten Formen als Specialfälle in sich enthält. Man hat nur $v = 0$ und $v_1 = 0$ zu setzen oder $v = K$ und $v_1 = L$, um diese speciellen Ausdrücke zu gewinnen.

§ 4.

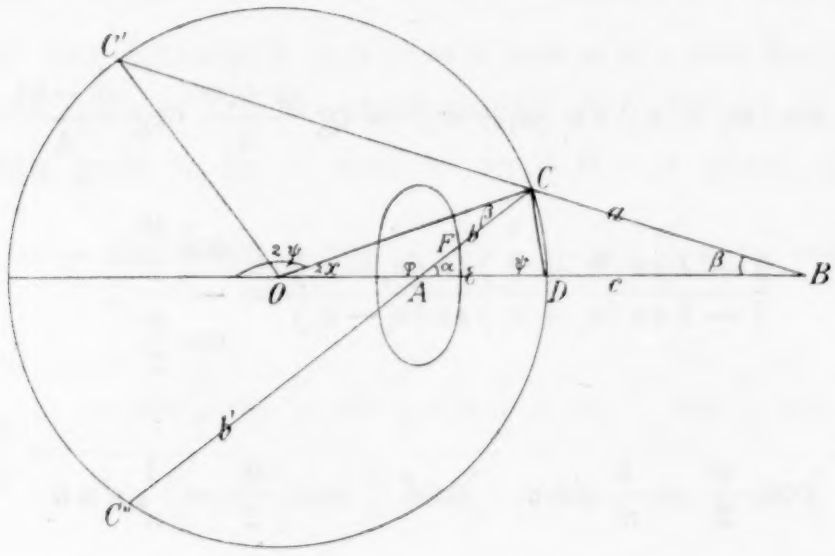
Die Darstellung der elliptischen Functionen am *Apollon*ischen Kreise und die Verwandtschaft der verschiedenen Darstellungen unter einander.

Der Kreis O habe die Eigenschaft, dass $\frac{CA}{CB} = \varkappa$ für jeden Punkt der Peripherie gelte. Dann ist $\sin\beta = \varkappa \sin\alpha$. Setzt man

$$\int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\alpha}} = u,$$

also $\alpha = am\, u$, so lassen sich alle Dreiecksgrössen durch die Variable u ausdrücken; und zwar ist $\sin\alpha = sn\, u$; $\cos\alpha = cn\, u$; $\operatorname{tg}\alpha = tn\, u$; $\sin\beta = \varkappa\, sn\, u$; $\cos\beta = dn\, u$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{\varkappa\, sn\, u}{dn\, u}$; $\sin\gamma = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = sn\, u\,(dn\, u + \varkappa\, sn\, u)$;

$a = \frac{c \sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{c}{\varkappa'^2}(dnu - \varkappa cnu)$; $b = \frac{\varkappa c}{\varkappa'^2}(dnu - \varkappa cnu)$ u. s. w. Punkt C' hat offenbar die Coordinate $2K - x$, der Punkt senkrecht über A ist demnach bestimmt durch $x = K$. $BC' = a'$ ist gleich $\frac{c}{\varkappa'^2}(dnu + \varkappa cnu)$; für C'' ist u $2K + x$,



also $b' = \frac{\varkappa c}{\varkappa'^2}(dnu + \varkappa cnu)$. Demnach ist $b + b' = \frac{2c\varkappa}{\varkappa'^2} dnu$, d. h. die Sehne CC'' ist proportional dnu. Bezeichnen wir die Coordinate von C nach der ersten Darstellung mit v, so ist $b = (OC - OA)\, snv$, also $db = (OC - OA)\, cnv\, dnv\, dv$, andererseits ist $db = \frac{\varkappa^2 c}{\varkappa'^2} snu\,(dnu - \varkappa cnu)\, du = \varkappa bsnu\, du$; also $(OC - OA)\, cnv\, dnv\, dv = \varkappa bsnu\, du$ oder $\frac{cnv\, dnv\, dv}{snv} = \varkappa snu\, du$; nun ist zu bemerken, dass der Modul für die erste Kreisdarstellung $\frac{OC - OA}{OC + OA} = \frac{1 - \varkappa}{1 + \varkappa}$ ist; daher ist $\sin CAD = \frac{i(1+\varkappa)}{2\varkappa} \frac{cnv\, dnv}{snv}$, andererseits $\sin CAD = snu$, folglich $dv = i \frac{(1+\varkappa)}{2} du$; die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\cdot(1-l^2y^2)}} = i\frac{(1+\varkappa)}{2} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\cdot(1-\varkappa^2x^2)}},$$

in welcher $l = \frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}$ ist, wird also befriedigt durch

$$y = \frac{1}{1-\varkappa}(\sqrt{1-\varkappa^2x^2} - \varkappa\sqrt{1-x^2}).$$

Da für $u = 0$ $v = L$ sein muss, so ist $v = L + i\frac{(1+\varkappa)}{2}u$. Aus der Gleichung

$sn\left(L+i\frac{(1+\varkappa)}{2}u\right)=\frac{1}{1-\varkappa}(dnu-\varkappa cnu)$ ist leicht zu erkennen, dass $L=\frac{1+\varkappa}{2}K'$ und der andere Periodicitätsmodul $L'=(1+\varkappa)K$ sein muss. Im Grunde genommen haben wir es hier mit der in den ersten Paragraphen ausgeführten *Landen*schen Transformation zu thun. Setzt man nämlich für u ui und $\varkappa'$ für $\varkappa$, so erhält man $\frac{cnv}{dnv}=\frac{1}{1-\varkappa'}\frac{dnu-\varkappa'}{cnu}$, und da $\sqrt{dn^2u-\varkappa'^2}=\varkappa cnu$ ist, so ist schliesslich

$$\frac{cnv}{dnv}=\sqrt{\frac{1+\varkappa'}{1-\varkappa'}}\sqrt{\frac{dnu-\varkappa'}{dnu+\varkappa'}}.$$

Auch die Darstellung, welche *Halphen* in seinem „Traité des fonctions elliptiques“ zur Definition und zum Nachweis der ersten Eigenschaften der elliptischen Functionen gegeben hat, wurzelt in der Darstellung am *Apollon*ischen Kreise. Wir haben nämlich gesehen, dass die Sehne CC'' proportional dnu nach dem Modul $\frac{AC}{BC}=\varkappa$ ist. Trägt man nun auf allen Sehnen einen Radiusvector umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Sehne ab, so ist natürlich das Segment FAE proportional

$$\int_0^{\alpha}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\alpha}}.$$

Ist $\alpha=\frac{\pi}{2}$, so ist durch die Integration ein Viertel der ganzen Fläche erreicht entsprechend der Bemerkung, dass der Punkt senkrecht über A die Coordinate $u=K$ hat. Bei *Halphen* heisst an dieser Stelle die Coordinate $\frac{L}{2}$; dies erklärt sich daraus: Ebenso wie α eine Function des Sectors ist, und zwar, wie wir wissen, eine Sinusamplitude, so ist auch der Centriwinkel χ in irgend einer Weise von dem Sector abhängig. Nun besteht aber bekanntlich zwischen χ und α die Relation

$$\frac{1+\varkappa}{2}\int_0^{\alpha}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\alpha}}=\int_0^{\chi}\frac{d\chi}{\sqrt{1-\varkappa_1^2\sin^2\chi}},$$

in welcher $\sin(\alpha-2\chi)=\varkappa\sin\alpha$ und $\varkappa_1=\frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa}$ ist. Es ist also χ dem Charakter nach dieselbe Function wie α nur nach einem anderen Modul. Es kann also nicht Wunder nehmen, wenn χ die Merkmale der Sinusamplitude besitzt. Da erst dem Winkel $\alpha=\pi$ der Werth $\chi=\frac{\pi}{2}$ entspricht,

so kann die Symmetrie der Curve besser ausgenützt werden, als beim *Apollon*ischen Kreise.

Will man direct von der Kreisdarstellung zur *Halphen*schen Construction übergehen, so beachte man Folgendes: es ist

$$AC = \sqrt{OC^2+OA^2-2OC\cdot OA\cos 2\chi} = \sqrt{(OC+OA)^2-4OC\cdot OA\cos^2\chi},$$

also $AC = (OC+OA)\sqrt{1-\varkappa'^2\cos^2\chi}$, wo unter $\varkappa\ \frac{OC-OA}{OC+OA}$ zu verstehen ist. Setzt man $\chi = R-\psi$ und

$$\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-\varkappa'^2\sin^2\psi}} = v,$$

also $\psi = \operatorname{am} v$, so ist $AC = (OC+OA)\,dn\,(v,\varkappa')$; andererseits

$$AC = (OC-OA)\,sn\,(u,\varkappa),$$

also

$$\varkappa\, sn\,(u,\varkappa) = dn\,(v,\varkappa');$$

daraus ergiebt sich $v = iu+\text{const.}$

The *Riemann-Roch* Theorem and the Independence of the Conditions of Adjointness in the case of a curve for which the tangents at the multiple points are distinct from one another.

(By Mr. *J. C. Fields* at Hamilton).

§ 1.

In a paper which I have recently sent to the Acta Mathematica for publication I have given proofs of the *Riemann-Roch* theorem and of the independence of the conditions of adjointness for a curve in which the singularities were simplified as far as possible. In the present paper I extend the methods there employed to curves which are somewhat more general in their character, and in a subsequent paper I may say that I propose to establish the theorems here in question and other theorems in the theory of the algebraic functions, by other and more powerful methods which I have in my possession and which enable me to dispense with all simplifications of the fundamental curve and to treat it directly however complicated its singularities may be. Let

$$(1.) \qquad F(z, u) = \Sigma e_{r,s} z^r u^s = 0$$

be the equation to an irreducible algebraic curve of degree n. The form of this equation we shall suppose to be such that the tangents at the multiple points are distinct from one another and that these points are not

at the same time branch points and further we shall assume that no line parallel to the axis of u includes more than one point of the nature of a branch or multiple point, also that the asymptotes are all distinct from one another and none of them parallel to the axis of u and no two parallel to each other.

The variable u we shall regard throughout as the dependent variable. The coefficient e_{0n} of u^n will on the above hypotheses have a value different from 0.

§ 2.

Any rational function $R(z,u)$ we know may be expressed in the form

$$(2). \qquad R(z,u) = \sum_{\lambda} R_\lambda \left(\frac{1}{z-a_\lambda}, u\right) + R_0(z,u)$$

where $R_\lambda\left(\frac{1}{z-a_\lambda}, u\right)$ denotes a polynomial in $\left(\frac{1}{z-a_\lambda}, u\right)$ and $R_0(z,u)$ a polynomial in (z,u), the degrees of these polynomials in the variable u not being greater than $n-1$.

In this form we shall now attempt to express the most general rational function which becomes infinite only at ∞. If the function $R(z,u)$ is to be finite for a value $z = a_\lambda$ the corresponding element

$$R_\lambda\left(\frac{1}{z-a_\lambda}, u\right)$$

on the right of (2.) must also be finite for this value of the variable.

Now a fractional form

$$\frac{\varphi_\lambda(u)}{z-a_\lambda}$$

in which the numerator $\varphi_\lambda(u)$ is a polynomial in u of dregree $n-1$ must evidently become infinite for at least one of the n branches of the curve corresponding to the value $z = a_\lambda$ if to this value of z correspond n different values of u. In our element above we may therefore assume that $z = a_\lambda$ is a value of z to which correspond less than n different values of u. To the value $z = a_\lambda$ then, among other points, will correspond a branch point or a multiple point of our curve.

Suppose in the first place that we have to do with the case of a branch point (a_λ, b_λ) to which corresponds a cycle of ν branches. The equations to the ν branches in question will have the forms

$$(3.)\qquad \begin{cases} u-b_\lambda = \alpha\varepsilon_1(z-a_\lambda)^{\frac{1}{\nu}}+\cdots, \\ u-b_\lambda = \alpha\varepsilon_2(z-a_\lambda)^{\frac{1}{\nu}}+\cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ u-b_\lambda = \alpha\varepsilon_\nu(z-a_\lambda)^{\frac{1}{\nu}}+\cdots \end{cases}$$

where $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_\nu$ are the νth roots of unity, and where we have $\alpha \neq 0$ since by hypothesis our branch point is not at the same time to be a multiple point also.

On indicating by $b_\lambda^{(1)}, b_\lambda^{(2)} \ldots b_\lambda^{(n-\nu)}$ the $n-\nu$ values of u which besides the value $u = b_\lambda$ correspond to the value $z = a_\lambda$, we must evidently have the polynomial $\varphi_\lambda(u)$ divisible by the product

$$(4.)\qquad (u-b_\lambda)^\nu\,(u-b_\lambda^{(1)})\ldots(u-b_\lambda^{(n-\nu)})$$

if the fractional form in which it appears above is to be finite for all the branches corresponding to the value $z = \alpha_\lambda$. This however is impossible as n is the degree in u of the product here in question whereas the polynomial $\varphi_\lambda(u)$ only has the degree $n-1$.

A fractional form of the type

$$\frac{\varphi_\lambda(u)}{z-a_\lambda}$$

which does not become infinite for any of the branches of our curve corresponding to the value $z = a_\lambda$ does not exist therefore in the case where one of the points corresponding to this value of the variable is a branch point and an element corresponding to such value of the variable will consequently not present itself in the summation on the right of (2.) above in the case of the type of function we are considering.

The most general rational function which becomes infinite only at ∞ must therefore evidently have the form

$$(5.)\qquad \Sigma_l R_l\left(\frac{1}{z-a_l}, u\right) + R_0(z, u)$$

where the summation is supposed to be extended only to those values $z = a_l$ to which correspond multiple points. That an element corresponding to each multiple point actually presents itself in the summation may readily be shewn, and we shall now try to obtain a more precise form for the element corresponding to a given multiple point.

§ 3.

Suppose (a_l, b_l) to be a multiple point of order σ. The σ corresponding tangents, in accord with our original hypothesis, will all be distinct from one another. The corresponding element in the above summation may then be written in the form

$$R_l\left(\frac{1}{z-a_l}, u\right) = \frac{\varphi(z,u)}{(z-a_l)^s} \tag{6.}$$

where $\varphi(z,u)$ is a polynomial in (z,u) which is not divisible by $z-a_l$ and whose degrees in z and u are $s-1$ and $n-1$ respectively, and where we still have to determine the value of s and the more precise form of the numerator $\varphi(z,u)$.

On arranging $\varphi(z,u)$ according to powers of $z-a_l$ and $u-b_l$ and collecting terms of like degree together we may write the polynomial in the form

$$\varphi(z,u) = v_k + v_{k+1} + \cdots$$

where a term v_r is homogeneous and of degree r in $z-a_l$ and $u-b_l$. Our fractional element will then have the form

$$R_l\left(\frac{1}{z-a_l}, u\right) = \frac{v_k + v_{k+1} + \cdots}{(z-a_l)^s}$$

and this must be finite for all the branches corresponding to the value $z = a_l$.

Suppose if possible that we have $k < s$. In order that our fractional form should not become infinite for any of the σ branches corresponding to the multiple point it will evidently be necessary that v_k be equal to 0 to the order $k+1$ at least for each one of these branches.

On writing for brevity

$$m = \frac{u-b_l}{z-a_l}$$

we may put v_k into the form

$$v_k = (z-a_l)^k\, t\,(m)$$

where $t(m)$ is a polynomial in m of degree k.

In order that v_k may vanish to the order $k+1$ for each of the σ branches corresponding to the multiple point then it is necessary that $t(m)$ should vanish to the order 1 at least for each of these branches.

Now on indicating by $m_1, m_2, \ldots, m_\sigma$ the values of $\frac{du}{dz}$ corresponding

to the σ branches of the curve through the multiple point it will follow from the above that we must have

$$t(m_1) = 0,\ t(m_2) = 0, \ldots t(m_\sigma) = 0.$$

And as $t(m)$ is of the degree k at most in m it is evident that we must have $k \gtreqless \sigma$ since by our original hypothesis in regard to the tangents at a multiple point the quantities $m_1, m_2, \ldots m_\sigma$ are all different from one another.

On the hypothesis then that we have $k < s$ it follows that we must at the same time have $k \gtreqless \sigma$.

We derive therefrom that we must either have $k \gtreqless s$ or $s > k \gtreqless \sigma$.

On the other hand we may write our fractional element in the form

$$(7.) \qquad R_l\left(\frac{1}{z-a_l}, u\right) = \frac{\psi(u) + (z-a_l)\,\varphi_1(z,u)}{(z-a_l)^s}$$

where the polynomial $\psi(u)$ takes account of all those terms in $\varphi(z, u)$ which are not divisible by $z-a_l$.

Since in $\varphi(z, u)$ arranged according to powers of $z-a_l$ and $u-b_l$ terms of order lower than $\varkappa$ do not appear it is also evident that in $\psi(u)$ arranged according to powers of $u-b_l$ terms of order lower than $\varkappa$ do not appear.

It follows therefore that $\psi(u)$ is divisible by $(u-b_l)^\varkappa$. On the other hand however $\psi(u)$ cannot be divisible by a power of $u-b_l$ higher than $(u-b_l)^{\sigma-1}$ for its degree in u is $n-1$ and it must be divisible by the $n-\sigma$ other factors $u-b$ corresponding to the value $z = a_l$ if the numerator in the expression on the right of (7.) is to have a zero for each of the n branches corresponding to this value of the variable.

It follows then that we must have $\varkappa \lesseqgtr \sigma-1$.

This however excludes the latter of the two alternative inequalities $\varkappa \gtreqless s$ and $s > \varkappa \gtreqless \sigma$ obtained in the foregoing and we arrive at the result expressed in the inequality

$$s \lesseqgtr \varkappa \lesseqgtr \sigma-1.$$

In our element as expressed in (6.) then the exponent s in the denominator is $\lesseqgtr \sigma-1$ on the hypothesis that the numerator $\varphi(z, u)$ is not divisible by $z-a_l$.

On removing this stricture on the numerator we may evidently take $s = \sigma-1$ and write our element in the form

$$(8.) \qquad R_l\Big(\frac{1}{z-a_l}, u\Big) = \frac{\varphi(z,u)}{(z-a_l)^{\sigma-1}},$$

where $\varphi(z,u)$ is a polynomial in (z,u) of degrees $\sigma-2$ and $n-1$ in z and u respectively and where it may or may not happen to be divisible by $z-a_l$ so far as we have yet decided.

§ 4.

We have now to determine more precisely the form of the element in (8.) in order that it may be finite for all the branches of our curve corresponding to the value $z=a_l$. For this it is necessary and sufficient that the numerator $\varphi(z,u)$ should become zero to the order $\sigma-1$ for each of these branches. The number of conditions which this will impose upon the coefficients of $\varphi(z,u)$ we shall shew to be $n(\sigma-1)-\frac{1}{2}\sigma(\sigma-1)$. That their number does not fall short of this figure we may prove as follows.

On dropping the suffix l in a_l for convenience and on representing our original equation in the form

$$(9.) \qquad 0=F(z,u)=\begin{cases} (u-b-m_{1,1}(z-a)- & m_{1,2}(z-a)^2-\cdots-m_{1,\sigma-2}(z-a)^{\sigma-2}-\cdots) \\ (u-b-m_{2,1}(z-a)- & m_{2,2}(z-a)^2-\cdots-m_{2,\sigma-2}(z-a)^{\sigma-2}-\cdots) \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ (u-b-m_{\sigma,1}(z-a)- & m_{\sigma,2}(z-a)^2-\cdots-m_{\sigma,\sigma-2}(z-a)^{\sigma-2}-\cdots) \\ (u-b_{\sigma+1}-m_{\sigma+1,1}(z-a)-m_{\sigma+1,2}(z-a)^2-\cdots & \\ \qquad\qquad \cdots-m_{\sigma+1,\sigma-2}(z-a)^{\sigma-2}-\cdots) & \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots & \\ (u-b_n-m_{n,1}(z-a)- & m_{n,2}(z-a)^2-\cdots-m_{n,\sigma-2}(z-a)^{\sigma-2}-\cdots) \end{cases}$$

we shall consider a product of $n-1$ factors

$$(10.) \qquad \pi(z,u)=\begin{cases} (u-\beta_2 & -\mu_{2,1}(z-a)- & \mu_{2,2}(z-a)^2-\cdots- & \mu_{2,\sigma-2}(z-a)^{\sigma-2}) \\ (u-\beta_3 & -\mu_{3,1}(z-a)- & \mu_{3,2}(z-a)^2-\cdots- & \mu_{3,\sigma-2}(z-a)^{\sigma-2}) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ (u-\beta_\sigma & -\mu_{\sigma,1}(z-a)- & \mu_{\sigma,2}(z-a)^2-\cdots- & \mu_{\sigma,\sigma-2}(z-a)^{\sigma-2}) \\ (u-\beta_{\sigma+1}-\mu_{\sigma+1,1}(z-a)- & \mu_{\sigma+1,2}(z-a)^2-\cdots- & \mu_{\sigma+1,\sigma-2}(z-a)^{\sigma-2}) & \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ (u-\beta_n & -\mu_{n,1}(z-a)- & \mu_{n,2}(z-a)^2-\cdots- & \mu_{n,\sigma-2}(z-a)^{\sigma-2}) \end{cases}$$

where the constants β and the coefficients μ are as yet undetermined.

This product represents a polynomial in (z, u) of degree $n-1$ in u. For arbitrary values of the constants β this polynomial will evidently not be zero for any of the n branches of our curve in (9.). By assigning definite values to these constants and to certain of the coefficients μ however and that successively in a certain definite order, we shall now attempt to build up a product which becomes zero to the order $\sigma-1$ at least for each of the n branches here in question.

Namely to the quantities

$$\begin{array}{lllll}
\beta_2 & \mu_{21} & \mu_{22} & \cdots & \mu_{2,\sigma-3} \quad \mu_{2,\sigma-2}, \\
\beta_3 & \mu_{31} & \mu_{32} & \cdots & \mu_{3,\sigma-3}, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\beta_{\sigma-1} & \mu_{\sigma-1,1}, & & & \\
\beta_\sigma, & & & & \\
\beta_{\sigma+1} & \mu_{\sigma+1,1} & \mu_{\sigma+1,2} & \cdots & \mu_{\sigma+1,\sigma-2}, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\beta_n & \mu_{n1} & \mu_{n2} & \cdots & \mu_{n\sigma-2},
\end{array}$$

we shall assign successively the corresponding values in the system

$$\begin{array}{lllll}
b & m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2,\sigma-3} \quad m_{2,\sigma-2}, \\
b & m_{31} & m_{32} & \cdots & m_{3,\sigma-3}, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
b & m_{\sigma-1,1}, & & & \\
b, & & & & \\
b_{\sigma+1} & m_{\sigma+1,1} & m_{\sigma+1,2} & \cdots & m_{\sigma+1,\sigma-2}, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
b_n & m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{n,\sigma-2},
\end{array}$$

the order in which we assume these values to be assigned being that from left to right along each horizontal row in succession beginning with the topmost.

Calling the branches of our curve in the order in which they occur in the equation (9.) the first, second ... n^{th} branch we see that the values in the $n-1$ rows above correspond respectively to the second, third ... n^{th} branch and we see further that each successive value assigned in a given

row increases by 1 the order to which the product $\pi(z, u)$ becomes zero for the corresponding branch, the number of values in the row being just sufficient to bring the order of the zero up to $\sigma-1$. It is immaterial for our purpose that the order of this zero may happen to be increased afterwards in assigning the values in the following rows corresponding to the other branches. Also it will be observed that in assigning b as the first value in each of the first $\sigma-1$ rows we have incidentally provided for a zero of order $\sigma-1$ corresponding to the first branch, to which in our system of $n-1$ rows no special row has been assigned.

The number of the constants β and coefficients μ whose values we have assigned in the product (10.) is evidently $\frac{1}{2}\sigma(\sigma-1)+(n-\sigma)(\sigma-1)$ and in the order in which they have been assigned each one of these values has furnished our product with an additional one at least of the aggregate of $n(\sigma-1)$ zeros which it was to possess.

Now the product $\pi(z, u)$ represents a polynomial in (z, u) of degree $n-1$ in u and it therefore evidently follows from the above that in the case of an arbitrary polynomial $\varrho(z, u)$ in (z, u) of degree $n-1$ in u, that its coefficients must be subjected to at least $\frac{1}{2}\sigma(\sigma-1)+(n-\sigma)(\sigma-1)$ independent conditions if it is to possess a zero of order $\sigma-1$ corresponding to each of the n branches.

These conditions will not of course affect the coefficients of terms which are divisible by $(z-a)^{\sigma-1}$ and we conclude therefore that in a polynomial $\varphi(z, u)$ of degrees $\sigma-2$ and $n-1$ in z and u respectively which is zero to the order $\sigma-1$ for each of the n branches, the coefficients must be subject to at least $n(\sigma-1)-\frac{1}{2}\sigma(\sigma-1)$ independent conditions. Now the total number of terms in the most general polynomial of degrees $\sigma-2$ and $n-1$ in z and u respectively is $n(\sigma-1)$ and it follows therefore that in the most general polynomial of this character which possesses a zero of order $\sigma-1$ corresponding to each of the n branches the number of the arbitrary coefficients cannot be greater than $\frac{1}{2}\sigma(\sigma-1)$.

§ 5.

Returning now to the element in (8.), we have just shewn that the numerator $\varphi(z, u)$ cannot involve more than $\frac{1}{2}\sigma(\sigma-1)$ arbitrary coefficients and we shall now see that it does involve this many arbitrary coefficients.

The function

$$\frac{F(a,u)}{(z-a)(u-b)}$$

is evidently finite for all the branches corresponding to the value $z=a$ and this we may shew to be true also of the $\frac{1}{2}\sigma(\sigma-1)$ functions

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^r\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^s\frac{F(\xi,\eta)}{(z-\xi)(u-\eta)}\right]_{\xi=a,\ \eta=b} \qquad (r+s=0,1,\ldots,\sigma-2).$$

Less accurately but more briefly we shall indicate these functions by the notation

$$(11.)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial a}\right)^r\left(\frac{\partial}{\partial b}\right)^s\frac{F(a,u)}{(z-a)(u-b)} \qquad (r+s=0,1,\ldots,\sigma-2).$$

We have

$$(12.)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{r!\,s!}\left(\dfrac{\partial}{\partial a}\right)^r\left(\dfrac{\partial}{\partial b}\right)^s\dfrac{F(a,u)}{(z-a)(u-b)} \\ = \dfrac{F(a,u)+\dfrac{1}{1!}(z-a)F'_a(a,u)+\dfrac{1}{2!}(z-a)^2F''_a(a,u)+\cdots+\dfrac{1}{r!}(z-a)^rF^{(r)}_a(a,u)}{(z-a)^{r+1}(u-b)^{s+1}} \\ = -\dfrac{\dfrac{1}{r+1!}(z-a)^{r+1}F^{(r+1)}_a(a,u)+\dfrac{1}{r+2!}(z-a)^{r+2}F^{(r+2)}_a(a,u)+\cdots+\dfrac{1}{n!}(z-a)^nF^{(n)}_a(a,u)}{(z-a)^{r+1}(u-b)^{s+1}} \end{cases}$$

and in this form it is evident that the function is finite not only for the branches passing through the multiple point but also for the remaining branches corresponding to the value $z=a$. From the former of the two forms on the right we see too that our function is of the type

$$\frac{\varphi(z,u)}{(z-a)^{r+1}},$$

where $\varphi(z,u)$ is a polynomial in (z,u), for the functions

$$F(a,u),\ F'_a(a,u),\ \ldots,\ F^{(r)}_a(a,u)$$

are all divisible by $(u-b)^{s+1}$ on our hypothesis that we have $r+s\leqq\sigma-2$. Also the numerator $\varphi(z,u)$ evidently involves z to a power lower than that in the denominator.

That the $\frac{1}{2}\sigma(\sigma-1)$ functions (11.) are linearly independent of one another we may readily shew. Construct namely a function

$$\sum_{0}^{\sigma-r-2}{}_s\ c_s\left(\frac{\partial}{\partial a}\right)^r\left(\frac{\partial}{\partial b}\right)^s\frac{F(a,u)}{(z-a)(u-b)}$$

which is linear in all those ones of our $\frac{1}{2}\sigma(\sigma-1)$ functions which involve $z-a$ to the same power $(z-a)^{r+1}$ in their denominators when represented in the fractional form.

On so representing the several elements in the summation our function will assume the form

$$(13.)\quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{0}^{\sigma-r-2}{}_{s} c_s \left(\frac{\partial}{\partial a}\right)^{r} \left(\frac{\partial}{\partial b}\right)^{s} \frac{F(a,b)}{(z-a)(u-b)} \\ \qquad = \dfrac{c_0\varphi_0(z,u) + c_1\varphi_1(z,u) + \cdots + c_{\sigma-r-2}\varphi_{\sigma-r-2}(z,u)}{(z-a)^{r+1}}, \end{array} \right.$$

where in the polynomials $\varphi_0(z,u)$, $\varphi_1(z,u) \ldots \varphi_{\sigma-r-2}(z,u)$ the terms which involve u to the highest powers are evidently independent of z and where the highest powers in question are different from one another for the several polynomials, being, as we see on inspecting the elements of the summation on the left, $u^{n-1}, u^{n-2}, \ldots, u^{n-\sigma+r+1}$ respectively.

From this it is plain that the numerator in the function on the right of (13.) cannot be divisible by $z-a$ unless the coefficients c all have the value 0 and it follows as a consequence that there can be no linear relation with constant coefficients connecting a function of this type corresponding to a given value of r with any number of the functions (11.) in which r has a smaller value.

The $\frac{1}{2}\sigma(\sigma-1)$ functions (11.) then are all linearly independent of one another and we therefore have a function

$$(14.)\quad \frac{\varphi(z,u)}{(z-a)^{\sigma-1}} = \sum_{0}^{\sigma-2}{}_{s} \sum_{0}^{\sigma-s-2}{}_{r} c_{r,s} \left(\frac{\partial}{\partial a}\right)^{r} \left(\frac{\partial}{\partial b}\right)^{s} \frac{F(a,u)}{(z-a)(u-b)},$$

which involves $\frac{1}{2}\sigma(\sigma-1)$ arbitrary coefficients $c_{r,s}$ and in which the numerator $\varphi(z,u)$ is a polynomial in (z,u) of degrees $\sigma-2$ and $n-1$ in z and u respectively.

That the numerator $\varphi(z,u)$ is not in general divisible by $z-a$ is readily seen, for in the summation on the right the only element which involves $(z-a)^{\sigma-1}$ in its denominator is that corresponding to the values $r=\sigma-2$, $s=0$ namely the element

$$c_{\sigma-2,0}\left(\frac{\partial}{\partial a}\right)^{\sigma-2} \frac{F(a,u)}{(z-a)(u-b)}$$

from which it appears that the numerator in (14.) is only then divisible by $z-a$ when we give $c_{\sigma-2,0}$ the value 0.

The function (14.) is of the form (8.) and is finite for all the branches corresponding to the value $z = a$. It is also the most general function of this type for it contains $\frac{1}{2}\sigma(\sigma-1)$ arbitrary coefficients and we have seen that such a function cannot contain more than this number of arbitrary coefficients.

An element of the summation in (5.) which corresponds to a multiple point (a, b) of order σ will then be of the form (14.), and the most general rational function of (z, u) which becomes infinite only at ∞ will evidently have the form

$$(15.) \qquad \Sigma_l \sum_0^{\sigma_l-2} \sum_0^{\sigma_l-s-2} c_{r,s,l} \left(\frac{\partial}{\partial a_l}\right)^r \left(\frac{\partial}{\partial b_l}\right)^s \frac{F(a_l, u)}{(z-a_l)(u-b_l)} + R_0(z,u),$$

where the coefficients $c_{r,s,l}$ are arbitrary and where the summation with regard to l is supposed to extend to all the multiple points (a_l, b_l), the respective orders of these multiple points being represented by the several letters σ_l.

On writing

$$(16.) \qquad \gamma_l = \sum_0^{\sigma_l-2} \sum_0^{\sigma_l-s-2} c_{r,s,l} \left(\frac{\partial}{\partial a_l}\right)^r \left(\frac{\partial}{\partial b_l}\right)^s,$$

we may briefly represent this function in the form

$$(17.) \qquad \Sigma_l \gamma_l \frac{F(a_l, u)}{(z-a_l)(u-b_l)} + R_0(z,u),$$

where it is to be remembered that γ_l is a symbolic operator depending linearly on $\frac{1}{2}\sigma_l(\sigma_l-1)$ arbitrary constants.

§ 6.

If (a, b) be an ordinary point the function

$$\frac{F(a,u)}{(z-a)(u-b)}$$

is finite excepting at ∞ and at the point (a, b) where it has an infinity of the first order.

This is true also of a branch point, the infinity of the first order here being that indicated by $(z-a)^{-\frac{1}{\nu}}$ in the case where the corresponding cycle consists of ν branches.

In the case of a multiple point (a, b) a function of the above form is infinite only at ∞. We may however readily construct a function which

becomes infinite to the first order for a given one of the σ branches through the multiple point and is otherwise finite excepting at ∞.

Indicating the inclinations of the tangents to the several branches through (a, b) by $m_1, m_2, \ldots, m_\sigma$ and referring to the corresponding branches as the first, second etc. respectively, we shall shew that the function

$$(18.) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial a} + m_\varkappa \frac{\partial}{\partial b}\right)^{\sigma-1} \frac{F(a,u)}{(z-a)(u-b)}$$

is infinite to the first order for the $\varkappa^{\text{th}}$ branch through the multiple point and finite for the remaining $n-1$ branches corresponding to the value $z = a$.

That it is finite for the $n-\sigma$ branches which do not pass through the multiple point is evident, for it may be expressed linearly in terms of a number of elements like that which appears on the left of formula (12.), excepting that here the sum of the exponents r and s is $\sigma-1$. The element in (12.) however, no matter how large the exponents r and s may be, is finite for all the branches corresponding to the value $z = a$ which do not pass through the multiple point, as we see on regarding the second expression on the right of this formula.

To determine the character of our function for the branches passing through the multiple point we write

$$(19.) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\sigma-1!}\left(\frac{\partial}{\partial a} + m_\varkappa \frac{\partial}{\partial b}\right)^{\sigma-1} \frac{F(a,u)}{(z-a)(u-b)} \\ &= \sum_0^{\sigma-1} \frac{m_\varkappa^{\sigma-1-t}}{t!\,\sigma-1-t!} \left(\frac{\partial}{\partial a}\right)^t \left(\frac{\partial}{\partial b}\right)^{\sigma-1-t} \frac{F(a,u)}{(z-a)(u-b)} \\ &= \sum_0^{\sigma-1} \frac{m_\varkappa^{\sigma-1-t}\left\{F(a,u) + F'_a(a,u)(z-a) + F''_a \frac{(a,u)}{2!}(z-a)^2 + \cdots + \frac{F_a^{(t)}(a,u)}{t!}(z-a)^t\right\}}{(z-a)^{t+1}(u-b)^{\sigma-t}}. \end{aligned} \right.$$

Here in any element of the second summation on the right, we see that the several terms in the numerator are all divisible by the factor $(u-b)^{\sigma-t}$ in the denominator and that these terms in fact are all zero to the order σ for each of the branches through the multiple point.

On dividing the numerator of the element through by $(u-b)^{\sigma-t}$, it is evident that the element cannot become infinite to an order higher than 1 for any of the branches through the multiple point. Our function (19.) then will not become infinite to an order higher than the first for any of the branches through the multiple point. Whether or not it does become infinite for a given one of these branches, will be determined by inspection

of the coefficient of $(z-a)^{-1}$ obtained on substituting for u its expression in terms of z derived from the equation

$$u-b = m(z-a)+\cdots$$

to the branch in question.

This coefficient, as obtained from the second summation on the right of (19.), is evidently

$$(20.)\qquad \sum_0^{\sigma-1}{}_t \sum_0^{t}{}_s \frac{F_{a,b}^{s,\sigma-s}}{s!\,\sigma-s!}\, m^{t-s} m_\varkappa^{\sigma-1-t} = \sum_0^{\sigma-1}{}_s \frac{F_{a,b}^{s,\sigma-s}}{s!\,\sigma-s!}\cdot\frac{m^{\sigma-s}-m_\varkappa^{\sigma-s}}{m-m_\varkappa}$$

where for brevity we employ the notation $F_{a,b}^{s,\sigma-s}$ to denote $\left(\frac{\partial}{\partial a}\right)^s \left(\frac{\partial}{\partial b}\right)^{\sigma-s} F(a,b)$.

The expression (20.) may further be put into the form

$$(21).\quad \frac{1}{m-m_\varkappa}\left\{\sum_0^{\sigma}{}_s \frac{F_{a,b}^{s,\sigma-s}}{s!\,\sigma-s!}\,(m^{\sigma-s}-m_\varkappa^{\sigma-s})\right\} = \frac{1}{m-m_\varkappa}\sum_0^{\sigma}{}_s \frac{F_{a,b}^{s,\sigma-s}}{s!\,\sigma-s!}\, m^{\sigma-s}$$

for

$$\left(\frac{\partial}{\partial a}+m\frac{\partial}{\partial b}\right)^\sigma F(a,b) = \sum_0^{\sigma}{}_s \frac{F_{a,b}^{s,\sigma-s}}{s!\,\sigma-s!}\, m^{\sigma-s} = 0$$

is the equation which determines the inclinations $m_1, m_2, \ldots, m_\varkappa, \ldots, m_\sigma$ of the tangents to the σ branches through the multiple point. On substituting these inclinations in turn for m in the expression on the right of (21.) then we always obtain 0 excepting in the case $m = m_\varkappa$, for which the expression evidently must have a value other than 0 since by our original hypothesis the tangents at the multiple point are all distinct from one another. In the development of the function (19.) corresponding to a given branch through the multiple point the coefficient of $(z-a)^{-1}$ will or will not have the value 0 according as the branch in question is not or is the $\varkappa^{\text{th}}$ branch.

It follows therefore that our function (18.) is finite for all the branches corresponding to the value $z = a$ excepting for the $\varkappa^{\text{th}}$ branch through the multiple point, and that for this branch it is infinite to the first order. That all its other infinities must be at ∞ is self-evident.

With regard to this function it may also be remarked that we can write it in the form

$$(22.)\quad \left(\frac{\partial}{\partial a}+m_\varkappa\frac{\partial}{\partial b}\right)^{\sigma-1}\frac{F(a,u)}{(z-a)(u-b)} = \left(\frac{\partial}{\partial a}+m_\varkappa\frac{\partial}{\partial b}\right)^{\sigma-1}\frac{F(a,u)-F(a,b)}{(z-a)(u-b)}$$

and we are here at liberty to divide the numerator $F(a,u)-F(a,b)$ through by the factor $u-b$ before effecting the indicated operation.

§ 7.

In formulae (15.) and (17.) we have obtained a form of expression for the most general rational function of (z, u) which becomes infinite only at ∞.

The summation with regard to l in these formulae extends to all the multiple points (a_l, b_l) of our curve. The number of these multiple points we shall suppose to be δ and the points themselves we shall indicate by (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_δ, b_δ).

We shall also write

$$d = \sum_{l=1}^{\delta} \tfrac{1}{2}\sigma_l(\sigma_l - 1) \tag{23.}$$

where as before σ_l indicates the order of the multiple point (a_l, b_l). The aggregate number of arbitrary constant coefficients presenting themselves in the operators γ_l in the formula (17.) is then d.

Indicating by $(a_{\delta+1}, b_{\delta+1})$, $(a_{\delta+2}, b_{\delta+2})$, ..., $(a_{\delta+Q}, b_{\delta+Q})$ any Q points of our curve other than multiple points or points at ∞, the most general rational function of (z, u) which is infinite to the first order at each of these points and elsewhere finite excepting at ∞, may evidently be expressed in the form

$$\sum_{1}^{\delta+Q}{}_{\lambda} \gamma_\lambda \frac{F(a_\lambda, u)}{(z - a_\lambda)(u - b_\lambda)} + \tau(z, u) \tag{24.}$$

where $\tau(z, u)$ is an arbitrary polynomial in (z, u) and where as before γ_λ is a symbolic operator involving $\frac{1}{2}\sigma_\lambda(\sigma_\lambda - 1)$ arbitrary coefficients if the corresponding point (a_λ, b_λ) be a multiple point, while in the case of an ordinary point or a branch point γ_λ represents an arbitrary constant. For brevity and uniformity of language we shall speak of the operators γ_λ with the understanding that the operator γ_λ corresponding to other than a multiple point is simply a multiplying constant.

The number of arbitrary constants involved in the $\delta + Q$ operators γ_λ in the expression (24.) is $d + Q$.

Suppose now that we try to construct a function which is finite at ∞ and whose infinities, all of the first order, are included among those corresponding to the Q points $(a_{\delta+1}, b_{\delta+1}) \ldots (a_{\delta+Q}, b_{\delta+Q})$. Our function, if it exist, must be of the form (24.) and our only task will be to determine under what conditions a function of this form will not become infinite at ∞.

Suppose the directions of the n points at ∞ on our curve to be given by the equations

$$u - \varkappa_1 z = 0, \ \ldots, \ u - \varkappa_n z = 0$$

where, in accord with our original hypothesis in regard to the asymptotes of the curve, the n coefficients $\varkappa$ all have different values.

A homogeneous polynomial $t(z, u)$ of degree $n-1$ in z and u will evidently become infinite to the order $n-1$ for one at least of the n branches at ∞, as otherwise we should have $z^{n-1} t(1, \varkappa) = 0$ for $\varkappa = \varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ and, as the degree of the equation $t(1, \varkappa) = 0$ in $\varkappa$ is $n-1$, this equation would be an identity and we should therefore also have $t(z, u) = 0$ identically.

We derive thence that $z^r t(z, u)$ must be infinite to the order $n+r-1$ for one at least of the branches at ∞, and this is true whether r is positive or negative. It follows further that a polynomial $\tau(z, u)$ of degree $n+r-1$ must become infinite to the order $n+r-1$ for one at least of the branches at ∞, for the polynomial can evidently be written in the form

$$\tau(z, u) = z^r t(z, u) + \tau'(z, u),$$

where the degree of $\tau'(z, u)$ in (z, u) is not greater than $n+r-2$. Now in the expression (24.) above, which is to remain finite for $z = \infty$, we see that the individual elements of the summation therein appearing cannot become infinite to an order greater than $n-2$ and that this therefore must also be the case for the polynomial $\tau(z, u)$.

The function which we have to consider then may be written in the form

$$(25.) \qquad \sum_1^{\delta+\varrho} \lambda \gamma_\lambda \frac{F(a_\lambda, u)}{(z - a_\lambda)(u - b_\lambda)} + \tau_{n-2}(z, u),$$

where in $\tau_{n-2}(z, u)$ we employ the suffix $n-2$ to indicate the degree of the polynomial.

We have to study the conditions under which the expression (25.) does not become infinite at ∞.

§ 8.

From the equation to our curve we have

$$\frac{F(a_\lambda, u)}{(z - a_\lambda)(u - b_\lambda)} = \frac{F(a_\lambda, u) - F(a_\lambda, b_\lambda)}{(z - a_\lambda)(u - b_\lambda)} = \frac{\sum_{r,s} e_{r,s} a_\lambda^r (u^s - b_\lambda^s)}{(z - a_\lambda)(u - b_\lambda)}.$$

This we may write in the form

$$(26.)\quad \begin{cases} \dfrac{F(a_\lambda, u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)} = (z-a_\lambda)^{-1} \sum_{r,s} e_{r,s}\, a_\lambda^r (u^{s-1} + u^{s-2} b_\lambda + \cdots + b_\lambda^{s-1}) \\ \qquad\qquad = (z-a_\lambda)^{-1} \sum_{s=1}^{n} \{a_\lambda, b_\lambda\}_s\, u^{n-s}, \end{cases}$$

where

$$(27.)\quad \{a_\lambda, b_\lambda\}_s = \sum_{\sigma=0}^{s-1} \sum_{\varrho=0}^{\sigma} e_{\varrho, n-\sigma}\, a_\lambda^\varrho\, b_\lambda^{s-\sigma-1}.$$

We shall then have

$$(28.)\quad \begin{cases} \dfrac{F(a_\lambda, u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)} \\ = \left\{ \dfrac{1}{z} + \dfrac{a_\lambda}{z^2} + \dfrac{a_\lambda^2}{z^3} + \cdots + \dfrac{a_\lambda^{n-3}}{z^{n-2}} + \dfrac{a_\lambda^{n-2}}{z^{n-2}(z-a_\lambda)} \right\} \sum_1^n{}_s \{a_\lambda, b_\lambda\}_s \cdot u^{n-s} \\ = \left\{ \dfrac{1}{z} + \dfrac{a_\lambda}{z^2} + \dfrac{a_\lambda^2}{z^3} + \cdots + \dfrac{a_\lambda^{n-3}}{z^{n-2}} \right\} \sum_1^n{}_s \{a_\lambda, b_\lambda\}_s u^{n-s} + P_\lambda(z, u), \end{cases}$$

where $P_\lambda(z, u)$ is a rational function of (z, u) which is finite for $z = \infty$.

This we may evidently further reduce to the form

$$(29.)\quad \frac{F(a_\lambda, u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)} = \sum_1^{n-2}{}_s \sum_1^{n-s-1}{}_r a_\lambda^{r-1} \{a_\lambda, b_\lambda\}_s\, z^{-r}\, u^{n-s} + \overline{P}_\lambda(z, u),$$

where $\overline{P}_\lambda(z, u)$ is a rational function of (z, u) which is finite for $z = \infty$.

For the summation in (25.) we shall then have

$$(30.)\quad \begin{cases} \sum_1^{\delta+Q}{}_\lambda \gamma_\lambda \dfrac{F(a_\lambda, u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)} = \sum_1^{\delta+Q}{}_\lambda \sum_1^{n-2}{}_s \sum_1^{n-s-1}{}_r \gamma_\lambda\, a_\lambda^{r-1} \{a_\lambda, b_\lambda\}_s\, z^{-r}\, u^{n-s} + P(z, u) \\ \qquad\qquad = \sum_1^{n-2}{}_s \sum_1^{n-s-1}{}_r c_{n-s-r, n-s}\, z^{-r}\, u^{n-s} + P(z, u), \end{cases}$$

where $P(z, u)$ is a rational function of (z, u) which is finite for $z = \infty$ and where for the coefficients c we have

$$(31.)\quad c_{n-s-r, n-s} = \sum_1^{\delta+Q}{}_\lambda \gamma_\lambda\, a_\lambda^{r-1} \{a_\lambda, b_\lambda\}_s.$$

For the suffixes of the coefficients c here it is convenient to select the sum of the exponents of z and u and the exponent of u respectively.

On writing

$$(32.)\quad \gamma_{i,x} = \sum_1^{\delta+Q}{}_\lambda \gamma_\lambda\, a_\lambda^i\, b_\lambda^x$$

it is readily seen that we have

$$(33.)\quad c_{n-s-r, n-s} = \sum_0^{s-1}{}_\sigma \sum_0^{\sigma}{}_\varrho e_{\varrho, n-\sigma}\, \gamma_{r-1+\varrho, s-1-\sigma}.$$

Since the exponents of z which appear in the summations on the right of (30.) are all negative, whereas in the polynomial $\tau_{n-2}(z,u)$ in (25.) no such exponents make their appearance, it will not be inconsistent with the notation employed above if we write

$$(34.) \qquad \tau_{n-2}(z,u) = \sum_{2}^{n}{}_{s} \sum_{0}^{s-2}{}_{r} c_{n-s+r,n-s}\, z^r u^{n-s}.$$

Combining (30.) and (34.) we have

$$(35.) \quad \left\{ \begin{aligned} & \tau_{n-2}(z,u) + \sum_{1}^{\delta+Q}{}_{\lambda} \gamma_\lambda \frac{F(a_\lambda,u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)} \\ &= \sum_{2}^{n}{}_{s} \sum_{0}^{s-2}{}_{r} c_{n-s+r,n-s}\, z^r u^{n-s} + \sum_{1}^{n-2}{}_{s} \sum_{1}^{n-s-1}{}_{r} c_{n-s-r,n-s} z^{-r} u^{n-s} + P(z,u) \\ &= \sum_{1}^{n}{}_{s} \sum_{-(n-s-1)}^{s-2}{}_{r} c_{n-s+r,n-s}\, z^r u^{n-s} + c_{(0)} + P(z,u). \end{aligned} \right.$$

This again we may write in the form

$$(36.) \quad \sum_{1}^{\delta+Q}{}_{\lambda} \gamma_\lambda \frac{F(a_\lambda,u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)} + \tau_{n-2}(z,u) = \sum_{1}^{n-2}{}_{\mu} z^{-\mu} p_\mu(z,u) + c_{(0)} + P(z,u),$$

where

$$p_\mu(z,u) = \sum_{1}^{n}{}_{\nu} c_{n-1-\mu,n-\nu}\, z^{\nu-1} u^{n-\nu}$$

is a homogeneous polynomial in (z,u) of degree $n-1$.

Now if the expression (36.) is not to become infinite at ∞ for any of the n branches the polynomials $p(z,u)$ must all vanish identically, as otherwise the expression would be infinite to the order $n-r-1$ for some one at least of these branches in case $p_r(z,u)$ be the first of these polynomials which does not vanish identically.

Apart from $c_{0,0}$ then the coefficients c on the right of (35.) must all have the value 0. These coefficients however include among them the coefficients of the polynomial $\tau_{n-2}(z,u)$ and this polynomial therefore must reduce to the constant $c_{0,0}$.

Our expression on the left of (35.) and (36.) will then take the form

$$(37.) \qquad \sum_{1}^{\delta+Q}{}_{\lambda} \gamma_\lambda \frac{F(a_\lambda,u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)} + c_{0,0}$$

§ 9.

The coefficients $c_{n-s+r,n-s}$ of $\tau_{n-2}(z,u)$ are evidently those in which the first suffix is equal to or greater than the second. The remaining

coefficients $c_{n-s+r,\,n-s}$ in (35.) namely

$$(38.)\qquad \begin{cases} c_{n-2,\,n-1} & & & & & \\ c_{n-3,\,n-1} & c_{n-3,\,n-2} & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{1,\,n-1} & c_{1,\,n-2} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1,\,2} \end{cases}$$

are those in which the first suffix is less than the second.

These $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ coefficients as we have just seen must also all have the value 0. To each one of them corresponds an equation of the type given in (33.) and the system of $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ equations of this type will be obtained on giving to r and s respectively in (33.) the values

$$(39.)\qquad r = 1, 2, \ldots, n-s-1\,;\ s = 1, 2, \ldots, n-2.$$

This system of equations we shall attempt to satisfy by a proper choice of the quantities $\gamma_{i,k}$ on the right.

The number of these quantities which present themselves in the $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ equations is just equal to the number of the equations as we may readily shew. Namely the maximum sum of the suffixes i and $\varkappa$ in the quantities $\gamma_{i,\varkappa}$ appearing in the summation on the right of (33) is equal to $r+s-2$. Also from (39.) we see that $r+s-2$ cannot exceed $n-3$ in value. It follows therefore that the sum of the suffixes in the quantities $\gamma_{i,\varkappa}$ which appear in our equations is in no case greater than $n-3$.

Now the number of possible pairs of integers $(i,\varkappa)$ whose sum is equal to or less than $n-3$ is readily seen to be $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, and that all the $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ corresponding quantities $\gamma_{i,\varkappa}$ actually present themselves in our system of equations is immediately apparent, for in fact each one of them appears in some one of the equations (33.) with $e_{0,n}$ as coefficient, as we see on substituting for (r,s) in the term $e_{0,n}\gamma_{r-1,s-1}$ corresponding to the values $\rho = 0$, $\sigma = 0$ the several pairs of values furnished by (39.).

The number of the quantities $\gamma_{i,\varkappa}$ which present themselves in the system of equations (33.) is then equal to $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, that is it is just equal to the number of these equations.

From the equations (33.) we shall now seek to determine the quantities $\gamma_{i,\varkappa}$ on substituting for the quantities $c_{n-s+r,\,n-s}$ their value 0.

For this purpose we shall write our equations in the form

$$(40.)\quad \begin{cases} 0 = e_{0,n}\gamma_{r-1,s-1} + e_{1,n-1}\gamma_{r,s-2} + e_{2,n-2}\gamma_{r+1,s-3} + \cdots \\ \qquad \cdots + e_{s-2,n-s+2}\gamma_{r+s-3,1} + e_{s-1,n-s+1}\gamma_{r+s-2,0} + I'_{r-1,s-1} \end{cases}$$

where evidently $I'_{r-1,s-1}$ involves only those quantities $\gamma_{i,x}$ in which the sum of the suffixes is less than $r+s-2$.

The number of equations of the type (40.) in which the sum of the suffixes of the quantities $\gamma_{i,x}$ in evidence on the right has a given value $r+s-2=\tau$ is $\tau+1$, and these $\tau+1$ equations we shall group together and consider in the form

$$(41.)\quad \begin{cases} e_{0n}\gamma_{0,\tau} + e_{1,n-1}\gamma_{1,\tau-1} + e_{2,n-2}\gamma_{2,\tau-2} + \cdots \\ \qquad \cdots + e_{\tau-1,n-\tau+1}\gamma_{\tau-1,1} + e_{\tau,n-\tau}\gamma_{\tau,0} = -I'_{0,\tau}, \\ e_{0,n}\gamma_{1,\tau-1} + e_{1,n-1}\gamma_{2,\tau-2} + \cdots \\ \qquad \cdots + e_{\tau-2,n-\tau+1}\gamma_{\tau-1,1} + e_{\tau-1,n-\tau+1}\gamma_{\tau,0} = -I'_{1,\tau-1}, \\ e_{0,n}\gamma_{2,\tau-2} + \cdots \\ \qquad \cdots + e_{\tau-3,n-\tau+1}\gamma_{\tau-1,1} + e_{\tau-2,n-\tau+2}\gamma_{\tau,0} = -I'_{2,\tau-2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_{0,n}\gamma_{\tau-1,1} + e_{1,n-1}\gamma_{\tau,0} = -I'_{\tau-1,0}, \\ e_{0,n}\gamma_{\tau,0} = -I'_{\tau,0}. \end{cases}$$

Suppose now that the quantities $\gamma_{i,x}$ in which the sum of the suffixes is less than τ are all equal to 0. The same will then evidently also be true of the quantities I' on the right of the equations (41.), for they are linear and homogeneous in the quantities $\gamma_{i,x}$ the sum of whose suffixes is less than τ.

The equations (41.) then become

$$(42.)\quad \begin{cases} e_{0,n}\gamma_{0,\tau} + e_{1,n-1}\gamma_{1,\tau-1} + e_{2,n-2}\gamma_{2,\tau-2} + \cdots \\ \qquad \cdots + e_{\tau-1,n-\tau+1}\gamma_{\tau-1,1} + e_{\tau,n-\tau}\gamma_{\tau,0} = 0, \\ e_{0,n}\gamma_{1,\tau-1} + e_{1,n-1}\gamma_{2,\tau-2} + \cdots \\ \qquad \cdots + e_{\tau-2,n-\tau+2}\gamma_{\tau-1,1} + e_{\tau-1,n-\tau+1}\gamma_{\tau,0} = 0, \\ e_{0,n}\gamma_{2,\tau-2} + \cdots \\ \qquad \cdots + e_{\tau-3,n-\tau+3}\gamma_{\tau-1,1} + e_{\tau-2,n-\tau+2}\gamma_{\tau,0} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_{0,n}\gamma_{\tau-1,1} + e_{1,n-1}\gamma_{\tau,0} = 0, \\ e_{0,n}\gamma_{\tau,0} = 0. \end{cases}$$

Here the determinant of the coefficients is different from 0 and it follows hence that the quantities $\gamma_{0,\tau}, \gamma_{1,\tau-1}, \ldots \gamma_{\tau,0}$ must all have the value 0.

If then the quantities $\gamma_{i,\varkappa}$ in which the sum of the suffixes is less than τ all have the value 0 this will be so in the case of those quantities also in which the sum of the suffixes is equal to τ.

Now in the case $\tau=0$ the system of equations (41.) reduces to the single equation

$$e_{0,n}\,\gamma_{0,0} = c_{n-2,n-1} = 0,$$

we therefore have $\gamma_{0,0} = 0$ and it follows thence by our inductive reasoning above that the quantities $\gamma_{0,1}$ and $\gamma_{1,0}$ corresponding to the case $\tau = 1$ must also have the value 0, and by successive induction we see that the quantities $\gamma_{i,\varkappa}$ for which $\tau = i+\varkappa$ has one of the values $2, 3 \ldots n-3$ must all be equal to 0.

Substituting 0 then for all the $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ quantities $\gamma_{i,\varkappa}$ in the system of equations (32.) we obtain the system of equations

$$(43.) \qquad \sum_{1}^{\delta+Q}{}_{\lambda}\, \gamma_\lambda\, a_\lambda^i\, b_\lambda^\varkappa = 0 \qquad (i+\varkappa=0,1,2,\ldots,n-3.)$$

Any function then whose infinities correspond to ones among the Q points $(a_{\delta+1}, b_{\delta+1}), \ldots, (a_{\delta+Q}, b_{\delta+Q})$ and are of the first order only, must be of the form (37.) and its operating coefficients γ_λ must satisfy the conditions implied in the system of $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ equations (43.).

Conversely if this system of equations can be satisfied by certain operators γ_λ not all of which are 0, a function of the contemplated character other than a constant exists. For a function of the type (37.) constructed with the operators γ_λ in question and reduced to the form on the right of (36.) will evidently, by virtue of the equations (32.) and (33.) have all its coefficients c with the exception of $c_{0,0}$ equal to 0 and will therefore be finite for $z = \infty$. Its infinities will consequently all be included under those corresponding to the Q points $(a_{\delta+1}, b_{\delta+1}), \ldots, (a_{\delta+Q}, b_{\delta+Q})$.

§ 10.

We shall now take up the study of our equations (43.) more in detail, and in the first place we shall consider the case $Q = 0$.

In this case our equations become

$$(44.) \qquad \sum_{1}^{\delta}{}_{\lambda}\, \gamma_\lambda\, a_\lambda^i\, b_\lambda^\varkappa = 0 \qquad (i+\varkappa=0,1,2,\ldots,n-3).$$

Here the points $(a_1, b_1) \dots (a_\delta, b_\delta)$ are the multiple points of our curve and the satisfaction of this system of equations by operators γ_λ which are not all 0 would imply the existence of a function of the form (37.) other than $c_{0,0}$ itself and therefore evidently other than a constant, which at the same time is nowhere infinite. This however as we know is impossible, for an algebraic function must either be a constant or must somewhere become infinite.

It follows therefore that the system of equations (44.) can only be satisfied when all the operators γ_λ reduce to 0, or in other words when all the coefficients c in the operators

$$\gamma_\lambda = \sum_0^{\sigma_\lambda - 2} {}_s \sum_0^{\sigma_\lambda - s - 2} {}_r \; c_{r,s,\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial a_\lambda}\right)^r \left(\frac{\partial}{\partial b_\lambda}\right)^s$$

have the value 0.

This proves that the conditions for adjointness are independent of one another. The conditions for adjointness namely are the conditions which must be satisfied by the coefficients $\beta_{i,\varkappa}$ in the equation to a curve

$$\sum_{i,\varkappa} \beta_{i,\varkappa} z^i u^\varkappa = 0 \tag{45.}$$

in order that it may possess as multiple points of the orders

$$\sigma_1 - 1, \sigma_2 - 1 \dots \sigma_\delta - 1$$

respectively the points $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_\delta, b_\delta)$ which on the original curve are multiple points of the orders $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\delta$, and these conditions in the case of a curve of degree $n-3$ are given by the $d = \sum_1^\delta {}_\lambda \frac{1}{2} \sigma_\lambda (\sigma_\lambda - 1)$ equations

$$\left(\frac{\partial}{\partial a_\lambda}\right)^r \left(\frac{\partial}{\partial b_\lambda}\right)^s \sum_{i+\varkappa \leqq n-3} \beta_{i,\varkappa} a_\lambda^i b_\lambda^\varkappa = 0 \quad (r+s=0,1,2,\dots,\sigma_\lambda - 2;\ \lambda = 1,2,\dots,\delta) \tag{46.}$$

and these equations in the quantities $\beta_{i,\varkappa}$ are evidently linearly independent of one another since, as we have seen, the system of equations (44.) can only be satisfied when the operators γ_λ all reduce to 0.

Since the d conditions of adjointness are independent of one another in the case of a curve of degree $n-3$ they will also be independent of one another in the case of a curve whose degree is greater than $n-3$.

On defining the genus of a curve as the number of linearly independent adjoint functions of degree $n-3$ and on indicating this number by the letter p we shall have from the above

$$p = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - d.$$

We shall now consider the equations (43.) in the case where we have $Q > 0$. These equations will or will not be satisfied by values for the quantities γ_λ not all of which are 0 according as the Q equations

$$(47.) \qquad \sum_{i+x \leqq n-3} \beta_{i,x}\, a_\lambda^i\, b_\lambda^x = 0 \qquad (\lambda = \delta+1, \delta+2, \ldots, \delta+Q.)$$

in the quantities $\beta_{i,x}$ are not or are linearly independent of one another and of the d equations (46.).

That these $d+Q$ equations are linearly independent of one another for an arbitrary set of Q points $(a_{\delta+1}, b_{\delta+1}), \ldots, (a_{\delta+Q}, b_{\delta+Q})$ is evident so long as we have $Q \leqq p$, for the number $d+Q$ of the equations is then

$$\leqq \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

the number of the coefficients $\beta_{i,x}$. In this case then it follows that the operators γ_λ in the form (37.) must all reduce to 0 and consequently that it is impossible to construct a rational function of z, u other than a constant whose infinities, all of the first order, correspond to ones among the Q arbitrary points $(a_{\delta+1}, b_{\delta+1}), \ldots, (a_{\delta+Q}, b_{\delta+Q})$. It might be possible however to construct such a function for a special set of Q points, and in the case $Q = p$ if $(a_{\delta+1}, b_{\delta+1}), \ldots, (a_{\delta+p}, b_{\delta+p})$ be such a special set of points it is evident that they will lie on an adjoint curve of degree $n-3$.

In the case where we have $Q \geqq p+1$ it is always possible to satisfy the equations (43.) by operators γ_λ not all of which reduce to 0, for in this case the $d+Q$ quantities involved in these operators are in excess of the number of the equations. It is therefore always possible to construct a rational function whose infinities are included under an arbitrary set of $p+1$ infinities.

The strength of a system Q points $(a_{\delta+1}, b_{\delta+1}), \ldots, (a_{\delta+Q}, b_{\delta+Q})$ in determining an adjoint curve of degree $n-3$ is defined as the number q of conditions to which the coefficients of the general adjoint curve of degree $n-3$ must be subjected in order that it may pass through these Q points. The strength of any system of points cannot be greater than p, for this is the number of arbitrary coefficients involved in the expression of the general adjoint curve of degree $n-3$. In our system of equations (43.) we see that the number of arbitrary quantities involved in the operators γ_λ in the most general system of solutions of these equations is in all cases equal to $Q-q$,

the number namely of the Q equations (47.) taken in any given order which are dependent on the equations preceding them in this order and on the equations (46.). The number of arbitrary coefficients then, including the constant term, involved in the expression of the most general rational function whose infinities are included under a certain set of Q infinities, is $Q-q+1$ where q is the strength of the set of Q points

$$(a_{\delta+1}, b_{\delta+1}), \ldots, (a_{\delta+Q}, b_{\delta+Q})$$

to which the Q infinities in question correspond. This is the Riemann-Roch Theorem.

The infinities which do not actually present themselves in the most general function here in question, are those for which the corresponding quantities γ_λ in the equations (43.) must have the value 0, and to each of these as we see corresponds an equation in the system of equations (47.) which is independent of the remaining equations of this system and of the equations (46.).

Of the general function here in question we may evidently say that the infinity corresponding to a point (a_λ, b_λ) does or does not actually present itself, according as the omission of this point from the set of Q points $(a_{\delta+1}, b_{\delta+1}), \ldots, (a_{\delta+Q}, b_{\delta+Q})$ does not or does diminish the strength of the set.

In our proof of the Riemann-Roch Theorem above we have not included the case in which one or more of the Q infinities in question may happen to correspond to multiple points. It is readily seen that this case also may be accounted for on including in the summation in (24.) elements of the type given in (18.).

Die Principien der Mechanik für mehrere unabhängige Variable.

(Von Herrn *Leo Königsberger* in Heidelberg.)

Die vorliegende Arbeit schliesst sich unmittelbar an die von mir seit einigen Jahren fortgesetzten Untersuchungen über die Ausdehnung der als Principien der Mechanik bekannten mathematischen Theoreme, welche zum grossen Theil in diesem Journal erschienen sind und vor Kurzem im Zusammenhange in meinen „Principien der Mechanik“ veröffentlicht wurden. Während nun bisher meine Untersuchungen auf die Gestaltung der Sätze der Mechanik wägbarer Massen nicht nur für den Fall gerichtet waren, dass im kinetischen Potential im gewöhnlichen Sinne eine Trennung der actuellen und potentiellen Energie nicht möglich ist, sondern auch kinetische Potentiale beliebig hoher Ordnung zu Grunde gelegt und für diese die Ausdehnung der wesentlichsten Sätze der Mechanik wägbarer Massen und der Theorie des *Newton*schen Potentials entwickelt wurde, lasse ich nunmehr die Annahme nur *einer* unabhängigen Variabeln, der Zeit, fallen und werfe die weit schwierigere Frage auf nach der Gestaltung der Mechanik in rein mathematischem Sinne, unbekümmert um die Anwendungen auf Physik, für den Fall, dass das kinetische Potential beliebig viele unabhängige und abhängige Variable und deren partielle Ableitungen bis zu irgend welcher Ordnung hin enthält.

Ich werde mich im Folgenden der Kürze halber meistens nur auf beliebige kinetische Potentiale erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln

beschränken, die angewandten Methoden werden aber die Möglichkeit der Ausdehnung auf den allgemeinsten Fall unmittelbar erkennen lassen, wenn die in meinen „Principien der Mechanik“ ausführlich dargelegten Gesichtspunkte in Verwendung kommen.

§. 1.

Hülfsätze.

Hülfsatz 1. Seien $t_1, t_2, \ldots, t_\varkappa$ unabhängige, $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ von diesen abhängige Variable, und werde

$$\frac{\partial^{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_\varkappa} p_\alpha}{\partial t_1^{\nu_1}\,\partial t_2^{\nu_2}\ldots\partial t_\varkappa^{\nu_\varkappa}} \text{ mit } p_\alpha^{(\nu_1\nu_2\cdots\nu_\varkappa)}$$

bezeichnet, so gilt zunächst für jede Function

$$R = f(t_1, t_2, \ldots, t_\varkappa,\ p_1, \ldots, p_1^{(\nu_{11}\nu_{12}\cdots\nu_{1\varkappa})}, \ldots, p_\mu, \ldots, p_\mu^{(\nu_{\mu1}\nu_{\mu2}\cdots\nu_{\mu\varkappa})}, \ldots)$$

unter der Voraussetzung der Variation der Grössen $p_1, \ldots, p_\mu$ und deren Ableitungen die Beziehung

$$(1.)\qquad \frac{\partial^{m_1+m_2+\cdots+m_\varkappa}}{\partial t_1^{m_1}\,\partial t_2^{m_2}\ldots\partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}(\delta R) = \delta\,\frac{\partial^{m_1+m_2+\cdots+m_\varkappa} R}{\partial t_1^{m_1}\,\partial t_2^{m_2}\ldots\partial t_\varkappa^{m_\varkappa}};$$

da aber

$$(2.)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^{m_1+m_2+\cdots+m_\varkappa}}{\partial t_1^{m_1}\,\partial t_2^{m_2}\ldots\partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}(\delta R) = \frac{\partial^{m_1+m_2+\cdots+m_\varkappa}}{\partial t_1^{m_1}\,\partial t_2^{m_2}\ldots\partial t_\varkappa^{m_\varkappa}} \sum_1^\mu{}_\varepsilon \sum_{\nu_{\varepsilon\gamma}=0,1,2,\ldots n_{\varepsilon\gamma}} {}_{\nu_{\varepsilon1}\,\nu_{\varepsilon2}\,\ldots\nu_{\varepsilon\varkappa}} \\
&\qquad\qquad \frac{\partial R}{\partial p_\varepsilon^{(\nu_{\varepsilon1}\,\nu_{\varepsilon2}\cdots\nu_{\varepsilon\varkappa})}}\,\delta p_\varepsilon^{(\nu_{\varepsilon1}\,\nu_{\varepsilon2}\cdots\nu_{\varepsilon\varkappa})} \\
&= \sum_1^\mu{}_\varepsilon \sum_{\nu_{\varepsilon\gamma}=0,1,2,\ldots n_{\varepsilon\gamma}} {}_{\nu_{\varepsilon1}\cdots\nu_{\varepsilon\varkappa}} \sum_{\mu_{a1}+\mu_{a2}=m_a} {}_{\mu_{a1},\,\mu_{a2}} \frac{m_1!\,m_2!\ldots m_\varkappa!}{\mu_{11}!\,\mu_{12}!\,\mu_{21}!\,\mu_{22}!\cdots\mu_{\varkappa1}!\,\mu_{\varkappa2}!} \\
&\qquad \frac{\partial^{\mu_{11}+\mu_{21}+\cdots+\mu_{\varkappa1}}}{\partial t_1^{\mu_{11}}\,\partial t^{\mu_{21}}\ldots\partial t_\varkappa^{\mu_{\varkappa1}}}\left(\frac{\partial R}{\partial p^{(\nu_{\varepsilon1}\cdots\nu_{\varepsilon\varkappa})}}\right)\frac{\partial^{\mu_{12}+\mu_{22}+\cdots+\mu_{\varkappa2}}}{\partial t_1^{\mu_{12}}\,\partial t_2^{\mu_{22}}\ldots\partial t_\varkappa^{\mu_{\varkappa2}}}\,\delta p_\varepsilon^{(\nu_{\varepsilon1}\cdots\nu_{\varepsilon\varkappa})},
\end{aligned}\right.$$

wenn $n_{\varepsilon\gamma}$ den höchsten in R vorkommenden Werth von $\nu_{\varepsilon\gamma}$ bedeutet, und ferner

$$(3.)\quad \left\{\begin{aligned}
&\delta\,\frac{\partial^{m_1+m_2+\cdots+m_\varkappa} R}{\partial t_1^{m_1}\,\partial t_2^{m_2}\ldots\partial t_\varkappa^{m_\varkappa}} = \sum_1^\mu{}_\varepsilon \sum_{\varrho_{\varepsilon\gamma}=0,1,\ldots n_{\varepsilon\gamma}+m_\gamma} {}_{\varrho_{\varepsilon1}\cdots\varrho_{\varepsilon\varkappa}} \frac{\partial}{\partial p_\varepsilon^{(\varrho_{\varepsilon1}\,\varrho_{\varepsilon2}\cdots\varrho_{\varepsilon\varkappa})}} \\
&\qquad\qquad \left(\frac{\partial^{m_1+m_2+\cdots+m_\varkappa} R}{\partial t_1^{m_1}\,\partial t_2^{m_2}\ldots\partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\right)\delta p^{(\varrho_{\varepsilon1}\,\varrho_{\varepsilon2}\cdots\varrho_{\varepsilon\varkappa})}
\end{aligned}\right.$$

ist, so *folgen vermöge der Beziehung* (1.) *durch Vergleichung der Coefficienten der Variationen von* $p_1, \ldots p_\mu$ *und deren Ableitungen Relationen zwischen den Differentialquotienten von* R, *wenn sie erst nach* $t_1, \ldots t_\varkappa$ *und dann nach den*

p und deren Ableitungen, oder erst nach den p und deren Ableitungen und dann nach den t genommen werden. Es mögen hier die im Folgenden zur Anwendung kommenden Beziehungen, welche durch Gleichsetzen der Coefficienten von

$$\delta p_\varepsilon,\ \delta p_\varepsilon^{(100\ldots0)},\ \delta p_\varepsilon^{(010\ldots0)},\ \delta p_\varepsilon^{(200\ldots0)},\ \delta p_\varepsilon^{(020\ldots0)},\ \delta p_\varepsilon^{(110\ldots0)}$$

entstehen, hervorgehoben werden:

I.
$$\frac{\partial}{\partial p_\varepsilon}\left(\frac{\partial^{m_1+m_2+\cdots+m_\varkappa} R}{\partial t_1^{m_1}\partial t_2^{m_2}\ldots\partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\right)=\frac{\partial^{m_1+m_2+\cdots+m_\varkappa}}{\partial t_1^{m_1}\partial t_2^{m_2}\ldots\partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\left(\frac{\partial R}{\partial p_\varepsilon}\right)$$

II.
$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p_\varepsilon^{(100\ldots0)}}\left(\frac{\partial^{m_1+m_2+\cdots+m_\varkappa} R}{\partial t_1^{m_1}\partial t_2^{m_2}\ldots\partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\right)&=\frac{\partial^{m_1+m_2+\cdots+m_\varkappa}}{\partial t_1^{m_1}\partial t_2^{m_2}\ldots\partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\left(\frac{\partial R}{\partial p_\varepsilon^{(100\ldots0)}}\right)\\&\quad+m_1\frac{\partial^{m_1+m_2+\cdots+m_\varkappa-1}}{\partial t_1^{m_1-1}\partial t_2^{m_2}\ldots\partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\left(\frac{\partial R}{\partial p_\varepsilon}\right)\end{aligned}\right.$$ (4.)

III.
$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p_\varepsilon^{(010\ldots0)}}\left(\frac{\partial^{m_1+m_2+\cdots+m_\varkappa} R}{\partial t_1^{m_1}\partial t_2^{m_2}\ldots\partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\right)&=\frac{\partial^{m_1+m_2+\cdots+m_\varkappa}}{\partial t_1^{m_1}\partial t_2^{m_2}\ldots\partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\left(\frac{\partial R}{\partial p_\varepsilon^{(010\ldots0)}}\right)\\&\quad+m_2\frac{\partial^{m_1+m_2+\cdots+m_\varkappa-1}}{\partial t_1^{m_1}\partial t_2^{m_2-1}\ldots\partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\left(\frac{\partial R}{\partial p_\varepsilon}\right)\end{aligned}\right.$$

IV.
$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p_\varepsilon^{(200\ldots0)}}\left(\frac{\partial^{m_1+m_2+\cdots+m_\varkappa} R}{\partial t_1^{m_1}\partial t_2^{m_2}\ldots\partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\right)&=\frac{\partial^{m_1+m_2+\cdots+m_\varkappa}}{\partial t_1^{m_1}\partial t_2^{m_2}\ldots\partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\left(\frac{\partial R}{\partial p_\varepsilon^{(200\ldots0)}}\right)\\&\quad+m_1\frac{\partial^{m_1+m_2+\cdots+m_\varkappa-1}}{\partial t_1^{m_1-1}\partial t_2^{m_2}\ldots\partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\left(\frac{\partial R}{\partial p_\varepsilon^{(100\ldots0)}}\right)\\&\quad+\frac{m_1(m_1-1)}{1\cdot2}\frac{\partial^{m_1+m_2+\cdots+m_\varkappa-2}}{\partial t_1^{m_1-2}\partial t_2^{m_2}\ldots\partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\left(\frac{\partial R}{\partial p_\varepsilon}\right)\end{aligned}\right.$$

V.
$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p_\varepsilon^{(020\ldots0)}}\left(\frac{\partial^{m_1+m_2+\cdots+m_\varkappa} R}{\partial t_1^{m_1}\partial t_2^{m_2}\ldots\partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\right)&=\frac{\partial^{m_1+m_2+\cdots+m_\varkappa}}{\partial t_1^{m_1}\partial t_2^{m_2}\ldots\partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\left(\frac{\partial R}{\partial p_\varepsilon^{(020\ldots0)}}\right)\\&\quad+m_2\frac{\partial^{m_1+m_2+\cdots+m_\varkappa-1}}{\partial t_1^{m_1}\partial t_2^{m_2-1}\ldots\partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\left(\frac{\partial R}{\partial p_\varepsilon^{(010\ldots0)}}\right)\\&\quad+\frac{m_2(m_2-1)}{1\cdot2}\frac{\partial^{m_1+m_2+\cdots+m_\varkappa-2}}{\partial t_1^{m_1}\partial t_2^{m_2-2}\ldots\partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\left(\frac{\partial R}{\partial p_\varepsilon}\right)\end{aligned}\right.$$

VI.
$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p_\varepsilon^{(110\ldots0)}}\left(\frac{\partial^{m_1+m_2+\cdots+m_\varkappa} R}{\partial t_1^{m_1}\partial t_2^{m_2}\ldots\partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\right)&=\frac{\partial^{m_1+m_2+\cdots+m_\varkappa}}{\partial t_1^{m_1}\partial t_2^{m_2}\ldots\partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\left(\frac{\partial R}{\partial p_\varepsilon^{(110\ldots0)}}\right)\\+m_1\frac{\partial^{m_1+m_2+\cdots+m_\varkappa-1}}{\partial t_1^{m_1-1}\partial t_2^{m_2}\ldots\partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\left(\frac{\partial R}{\partial p_\varepsilon^{(010\ldots0)}}\right)&+m_2\frac{\partial^{m_1+m_2+\cdots+m_\varkappa-1}}{\partial t_1^{m_1}\partial t_2^{m_2-1}\ldots\partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\left(\frac{\partial R}{\partial p_\varepsilon^{(100\ldots0)}}\right)\\&\quad+m_1m_2\frac{\partial^{m_1+m_2+\cdots+m_\varkappa-2}}{\partial t_1^{m_1-1}\partial t_2^{m_2-1}\ldots\partial t_\varkappa^{m_\varkappa}}\left(\frac{\partial R}{\partial p_\varepsilon}\right).\end{aligned}\right.$$

Hülfsatz 2.

Seien $R_1, R_2, \ldots,$ Functionen von $t_1, t_2, \ldots, t_\varkappa, p_1, p_2, \ldots, p_\mu,$ und V eine Function von $t_1, t_2, \ldots, t_\varkappa, R_1, \ldots, R_1^{(\nu_{11}\nu_{12}\ldots\nu_{1\varkappa})}, \ldots, R_2, \ldots, R_2^{(\nu_{21}\nu_{22}\ldots\nu_{2\varkappa})}, \ldots,$ so ergiebt sich für das über ein bestimmtes Gebiet der t-Variabeln ausgedehnte k-fache Integral die Beziehung

$$(4.)\quad \left\{\begin{aligned} &\delta\int_{t_1^0}^{t_1^1}\int_{t_2^0}^{t_2^1}\cdots\int_{t_\varkappa^0}^{t_\varkappa^1} V\left(t_1,\ldots,t_\varkappa,R_1,\ldots,R_1^{(\nu_{11}\nu_{12}\ldots\nu_{1\varkappa})},\ldots,R_2,\ldots,R_2^{(\nu_{21}\nu_{22}\ldots\nu_{2\varkappa})},\ldots\right)dt_\varkappa\,dt_{\varkappa-1}\ldots dt_1\\ &=\int_{t_1^0}^{t_1^1}\int_{t_2^0}^{t_2^1}\cdots\int_{t_\varkappa^0}^{t_\varkappa^1}\Sigma_\alpha\left(\frac{\partial V}{\partial R_\alpha}\delta R_\alpha+\cdots+\frac{\partial V}{\partial R_\alpha^{(\nu_{\alpha1}\nu_{\alpha2}\ldots\nu_{\alpha\varkappa})}}\delta R_\alpha^{(\nu_{\alpha1}\nu_{\alpha2}\nu_{\alpha\varkappa})}+\cdots\right)dt_\varkappa\,dt_{\varkappa-1}\ldots dt_1, \end{aligned}\right.$$

unter der Voraussetzung, dass die Grössen $t_1, t_2, \ldots, t_\varkappa$ nicht variirt werden.

Machen wir nun die Annahme, dass die Variationen der Functionen $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ und deren partiellen Ableitungen nach $t_1, \ldots, t_\varkappa$ genommen bis zu einer Ordnung hin, die mindestens in Bezug auf *eine* der unabhängigen Variabeln von einer um eine Einheit niedrigeren Ordnung ist als die entsprechende höchste in V vorkommende, an den Grenzen des t-Gebietes verschwinden, so ist

$$\int_{t_1^0}^{t_1^1}\int_{t_2^0}^{t_2^1}\cdots\int_{t_\varkappa^0}^{t_\varkappa^1}\frac{\partial V}{\partial R_\alpha^{(\nu_{\alpha1}\nu_{\alpha2}\cdots\nu_{\alpha\varkappa})}}\delta R_\alpha^{(\nu_{\alpha1}\nu_{\alpha2}\cdots\nu_{\alpha\varkappa})}\,dt_\varkappa\,dt_{\varkappa-1}\ldots dt_1$$

$$=\int_{t_1^0}^{t_1^1}\int_{t_2^0}^{t_2^1}\cdots\int_{t_\varkappa^0}^{t_\varkappa^1}\frac{\partial V}{\partial R_\alpha^{(\nu_{\alpha1}\nu_{\alpha2}\cdots\nu_{\alpha\varkappa})}}\frac{d}{dt_\varkappa}\left(\delta R_\alpha^{(\nu_{\alpha1}\nu_{\alpha2}\cdots\nu_{\alpha\varkappa-1})}\right)dt_\varkappa\,dt_{\varkappa-1}\ldots dt_1$$

$$=-\int_{t_1^0}^{t_1^1}\int_{t_2^0}^{t_2^1}\cdots\int_{t_\varkappa^0}^{t_\varkappa^1}\frac{d}{dt_\varkappa}\left(\frac{\partial V}{\partial R_\alpha^{(\nu_{\alpha1}\nu_{\alpha2}\cdots\nu_{\alpha\varkappa})}}\right)\delta R_\alpha^{(\nu_{\alpha1}\nu_{\alpha2}\cdots\nu_{\alpha\varkappa-1})}\,dt_\varkappa\,dt_{\varkappa-1}\ldots dt_1$$

und hieraus durch Wiederholung derselben Operation

$$=(-1)^{\nu_{\alpha\varkappa}}\int_{t_1^0}^{t_1^1}\int_{t_2^0}^{t_2^1}\cdots\int_{t_\varkappa^0}^{t_\varkappa^1}\frac{d^{\nu_{\alpha\varkappa}}}{dt_\varkappa^{\nu_{\alpha\varkappa}}}\left(\frac{\partial V}{\partial R_\alpha^{(\nu_{\alpha1}\nu_{\alpha2}\cdots\nu_{\alpha\varkappa})}}\right)\delta R_\alpha^{(\nu_{\alpha1}\nu_{\alpha2}\cdots\nu_{\alpha\varkappa-1}{}^{(1)})}\,dt_\varkappa\,dt_{\varkappa-1}\ldots dt_1.$$

Da aber ferner unter derselben Annahme für die Grenzvariationen

$$\frac{d}{dt_{\varkappa-1}}\int_{t_\varkappa^0}^{t_\varkappa^1}\frac{d^{\nu_{a\varkappa}}}{dt_\varkappa^{\nu_{a\varkappa}}}\left(\frac{\partial V}{\partial R_a^{(\nu_{a1}\,\nu_{a2}\,\cdots\,\nu_{a\varkappa})}}\right)\delta R_a^{(\nu_{a1}\,\nu_{a2}\,\cdots\,\nu_{a\varkappa-1}-1\,0)}\,dt_\varkappa$$

$$=\int_{t_\varkappa^0}^{t_\varkappa^1}\frac{d}{dt_{\varkappa-1}}\left(\frac{d^{\nu_{a\varkappa}}}{dt_\varkappa^{\nu_{a\varkappa}}}\left(\frac{\partial V}{\partial R^{(\nu_{a1}\,\nu_{a2}\,\cdots\,\nu_{a\varkappa})}}\right)\right)\delta R_a^{(\nu_{a1}\,\nu_{a2}\cdots\nu_{a\varkappa-1}-1\,0)}\,dt_\varkappa$$

$$+\int_{t_\varkappa^0}^{t_\varkappa^1}\frac{d^{\nu_{a\varkappa}}}{dt_\varkappa^{\nu_{a\varkappa}}}\left(\frac{\partial V}{\partial R^{(\nu_{a1}\,\nu_{a2}\,\cdots\,\nu_{a\varkappa})}}\right)\delta R_a^{(\nu_{a1}\,\nu_{a2}\,\cdots\,\nu_{a\varkappa-1}\,0)}\,dt_\varkappa,$$

also

$$\int_{t_1^0}^{t_1^1}\int_{t_2^0}^{t_2^1}\cdots\int_{t_\varkappa^0}^{t_\varkappa^1}\frac{d^{\nu_{a\varkappa}}}{dt_\varkappa^{\nu_{a\varkappa}}}\left(\frac{\partial V}{\partial R_a^{(\nu_{a1}\,\nu_{a2}\,\cdots\,\nu_{a\varkappa})}}\right)\delta R_a^{(\nu_{a1}\,\nu_{a2}\,\cdots\,\nu_{a\varkappa-1}\,0)}\,dt_\varkappa dt_{\varkappa-1}\ldots dt_1$$

$$=-\int_{t_1^0}^{t_1^1}\int_{t_2^0}^{t_2^1}\cdots\int_{t_\varkappa^0}^{t_\varkappa^1}\frac{d^{\nu_{a\varkappa}+1}}{dt_{\varkappa-1}\,dt_\varkappa^{\nu_{a\varkappa}}}\left(\frac{\partial V}{\partial R_a^{(\nu_{a1}\,\nu_{a2}\,\cdots\,\nu_{a\varkappa})}}\right)\delta R_a^{(\nu_{a1}\,\nu_{a2}\,\cdots\,\nu_{a\varkappa-1}-1\,0)}dt_\varkappa\,dt_{\varkappa-1}\ldots dt_1$$

folgt, so ergiebt sich durch Fortsetzung desselben Verfahrens

$$\int_{t_1^0}^{t_1^1}\int_{t_2^0}^{t_2^1}\cdots\int_{t_\varkappa^0}^{t_\varkappa^1}\frac{\partial V}{\partial R_a^{(\nu_{a1}\,\nu_{a2}\,\cdots\,\nu_{a\varkappa})}}\,\delta R_a^{(\nu_{a1}\,\nu_{a2}\cdots\nu_{a\varkappa})}\,dt_\varkappa\,dt_{\varkappa-1}\ldots dt_1$$

$$=(-1)^{\nu_{a1}+\nu_{a2}+\ldots+\nu_{a\varkappa}}\int_{t_1^0}^{t_1^1}\int_{t_2^0}^{t_2^1}\cdots\int_{t_\varkappa^0}^{t_\varkappa^1}\frac{d^{\nu_{a1}+\nu_{a2}+\cdots+\nu_{a\varkappa}}}{dt_1^{\nu_{a1}}\,dt_2^{\nu_{a2}}\ldots dt_\varkappa^{\nu_{a\varkappa}}}\left(\frac{\partial V}{\partial R_a^{(\nu_{a1}\,\nu_{a2}\,\cdots\,\nu_{a\varkappa})}}\right)\delta R_a\,dt_\varkappa\,dt_{\varkappa-1}\ldots dt_1$$

und somit nach (4.)

$$(5.)\quad\begin{cases}\delta\displaystyle\int_{t_1^0}^{t_1^1}\int_{t_2^0}^{t_2^1}\cdots\int_{t_\varkappa^0}^{t_\varkappa^1}V(t_1,t_2,\ldots,t_\varkappa,\ldots,R_a,\ldots,R_a^{(\nu_{a1}\,\nu_{a2}\cdots\nu_{a\varkappa})},\ldots)\,dt_\varkappa\,dt_{\varkappa-1}\ldots dt_1\\ =\displaystyle\int_{t_1^0}^{t_1^1}\int_{t_2^0}^{t_2^1}\cdots\int_{t_\varkappa^0}^{t_\varkappa^1}\boldsymbol{\Sigma}_a\sum_{\nu_{a1}\,\nu_{a2}\cdots\nu_{a\varkappa}}(-1)^{\nu_{a1}+\nu_{a2}+\cdots+\nu_{a\varkappa}}\frac{d^{\nu_{a1}+\nu_{a2}+\cdots+\nu_{a\varkappa}}}{dt_1^{\nu_{a1}}\,dt_2^{\nu_{a2}}\ldots dt_\varkappa^{\nu_{a\varkappa}}}\\ \qquad\left(\frac{\partial V}{\partial R_a^{(\nu_{a1}\,\nu_{a2}\cdots\nu_{a\varkappa})}}\right)\delta R_a\,dt_\varkappa\,dt_{\varkappa-1}\ldots dt_1\\ =\displaystyle\int_{t_1^0}^{t_1^1}\int_{t_2^0}^{t_2^1}\cdots\int_{t_\varkappa^0}^{t_\varkappa^1}\boldsymbol{\Sigma}_a\sum_{\nu_{a1}\,\nu_{a2}\cdots\nu_{a\varkappa}}(-1)^{\nu_{a1}+\nu_{a2}+\cdots+\nu_{a\varkappa}}\frac{d^{\nu_{a1}+\nu_{a2}+\cdots+\nu_{a\varkappa}}}{dt_1^{\nu_{a1}}\,dt_2^{\nu_{a2}}\ldots dt_\varkappa^{\nu_{a\varkappa}}}\\ \qquad\left(\frac{\partial V}{\partial R_a^{(\nu_{a1}\,\nu_{a2}\cdots\nu_{a\varkappa})}}\right)\left(\frac{\partial R_a}{\partial p_1}\delta p_1+\cdots+\frac{\partial R_a}{\partial p_\mu}\delta p_\mu\right)dt_\varkappa\ldots dt_1.\end{cases}$$

Fasst man aber V als Function von $t_1, t_2, \ldots, t_\varkappa, p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ und deren partiellen Differentialquotienten auf, so ergiebt sich unter derselben Annahme für die Grenzvariationen

$$(6.)\quad \begin{cases} \delta \int_{t_1^0}^{t_1^1} \int_{t_2^0}^{t_2^1} \cdots \int_{t_\varkappa^0}^{t_\varkappa^1} V(t_1, t_2, \ldots, t_\varkappa, \ldots, R_\alpha, \ldots, R_\alpha^{(\nu_{\alpha 1}\, \nu_{\alpha 2} \cdots \nu_{\alpha\varkappa})}, \ldots)\, dt_\varkappa\, dt_{\varkappa-1} \ldots dt_1 \\ = \int_{t_1^0}^{t_1^1} \int_{t_2^0}^{t_2^1} \cdots \int_{t_\varkappa^0}^{t_\varkappa^1} \sum_{\lambda=1,2,\ldots,\mu} \sum_{\nu_{\lambda 1}\, \nu_{\lambda 2} \cdots \nu_{\lambda\varkappa}} (-1)^{\nu_{\lambda 1}+\nu_{\lambda 2}+\cdots+\nu_{\lambda\varkappa}} \frac{d^{\nu_{\lambda 1}+\nu_{\lambda 2}+\cdots+\nu_{\lambda\varkappa}}}{dt_1^{\nu_{\lambda 1}}\, dt_2^{\nu_{\lambda 2}} \ldots dt_\varkappa^{\nu_{\lambda\varkappa}}} \\ \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial p_\lambda^{(\nu_{\lambda 1}\, \nu_{\lambda 2} \cdots \nu_{\lambda\varkappa})}}\right) \delta p_\lambda\, dt_\varkappa\, dt_{\varkappa-1} \ldots dt_1, \end{cases}$$

und somit durch Gleichsetzen des Coefficienten von δp_λ der rechten Seite der Gleichungen (5.) und (6.), *die Beziehung zwischen den nach den unabhängigen Variablen genommenen totalen Differentialquotienten der partiellen Ableitungen der Grösse V als Function der R oder der p aufgefasst:*

$$(7.)\quad \begin{cases} \sum_{\nu_{\lambda 1}\, \nu_{\lambda 2} \cdots \nu_{\lambda\varkappa}} (-1)^{\nu_{\lambda 1}+\nu_{\lambda 2}+\cdots+\nu_{\lambda\varkappa}} \frac{d^{\nu_{\lambda 1}+\nu_{\lambda 2}+\cdots+\nu_{\lambda\varkappa}}}{dt_1^{\nu_{\lambda 1}}\, dt_2^{\nu_{\lambda 2}} \ldots dt_\varkappa^{\nu_{\lambda\varkappa}}} \left(\frac{\partial V}{\partial p_\lambda^{(\nu_{\lambda 1}\, \nu_{\lambda 2} \cdots \nu_{\lambda\varkappa})}}\right) \\ = \sum_{\alpha=1,2,\ldots} \sum_{\nu_{\alpha 1}\, \nu_{\alpha 2} \cdots \nu_{\alpha\varkappa}} (-1)^{\nu_{\alpha 1}+\nu_{\alpha 2}+\cdots+\nu_{\alpha\varkappa}} \frac{d^{\nu_{\alpha 1}+\nu_{\alpha 2}+\cdots+\nu_{\alpha\varkappa}}}{dt_1^{\nu_{\alpha 1}}\, dt_2^{\nu_{\alpha 2}} \ldots dt_\varkappa^{\nu_{\alpha\varkappa}}} \\ \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial R_\alpha^{(\nu_{\alpha 1}\, \nu_{\alpha 2} \cdots \nu_{\alpha\varkappa})}}\right) \frac{\partial R_\alpha}{\partial p_\lambda}. \end{cases}$$

Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass die durch diesen Hülfsatz ausgedrückten Beziehungen nur der Kürze halber mit Hülfe der Variation der Integrale hergeleitet wurden, dass sie aber ebenso einfach aus den Gleichungen des Hülfsatzes (1.) folgen.

Hülfsatz 3.

Soll eine Function

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_\varkappa, p_1, p_2, \ldots, p_\mu, \ldots, p_\alpha^{(10\ldots0)}, p_\alpha^{(01\ldots0)}, \ldots, p_\alpha^{(00\ldots1)} \ldots),$$

in welcher die Bezeichnungen des vorigen Hülfsatzes für die partiellen Differentialquotienten erster Ordnung nach den t genommen beibehalten sind, sich identisch additiv zusammensetzen aus den nach $t_1, t_2, \ldots, t_\varkappa$ genommenen totalen Differentialquotienten von Functionen derselben Grössen

$$\omega_\lambda(t_1, t_2, \ldots, t_\varkappa, p_1, p_2, \ldots, p_\alpha^{(10\ldots0)}, p_\alpha^{(01\ldots0)}, \ldots, p_\alpha^{(00\ldots1)}),$$

also

$$(8.) \qquad f = \frac{d\omega_1}{dt_1} + \frac{d\omega_2}{dt_2} + \cdots + \frac{d\omega_\varkappa}{dt_\varkappa} + \omega$$

sein, worin ω nur von $t_1, t_2, \ldots, t_\varkappa$ abhängen soll, so ist zunächst leicht zu sehen, dass, weil nach den Beziehungen des Hülfsatzes (1.)

$$\frac{\partial}{\partial p_s}\frac{d\omega_1}{dt_1} = \frac{d}{dt_1}\frac{\partial\omega_1}{\partial p_s}, \qquad \frac{\partial}{\partial p_s^{(10\ldots0)}}\frac{d\omega_1}{dt_1} = \frac{d}{dt_1}\frac{\partial\omega_1}{\partial p_s^{(10\ldots0)}} + \frac{\partial\omega_1}{\partial p_s},$$

$$\frac{\partial}{\partial p_s^{(01\ldots0)}}\frac{d\omega_1}{dt_1} = \frac{d}{dt_1}\frac{\partial\omega_1}{\partial p_s^{(01\ldots0)}}, \quad \ldots\ldots \frac{\partial}{\partial p_s^{(00\ldots1)}}\frac{d\omega_1}{dt_1} = \frac{d}{dt_1}\frac{\partial\omega_1}{\partial p_s^{(00\ldots1)}},$$

und da die Functionen ω_a nur die ersten partiellen Ableitungen der p enthalten,

$$\frac{\partial}{\partial p_s^{(20\ldots0)}}\frac{d\omega_1}{dt_1} = \frac{d}{dt_1}\frac{\partial\omega_1}{\partial p_s^{(20\ldots0)}} + \frac{\partial\omega_1}{\partial p_s^{(10\ldots0)}} = \frac{\partial\omega_1}{\partial p_s^{(10\ldots0)}},$$

$$\frac{\partial}{\partial p_s^{(020\ldots0)}}\frac{d\omega_1}{dt_1} = \frac{d}{dt_1}\frac{\partial\omega_1}{\partial p_s^{(020\ldots0)}} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial p_s^{(110\ldots0)}}\frac{d\omega_1}{dt_1} = \frac{d}{dt_1}\frac{\partial\omega_1}{\partial p_s^{(110\ldots0)}} + \frac{\partial\omega_1}{\partial p_s^{(010\ldots0)}} = \frac{\partial\omega_1}{\partial p_s^{(010\ldots0)}}, \ldots\ldots$$

ist, wenn man der Kürze halber nur zwei unabhängige Variable t_1 und t_2 annimmt, die identische Gleichung besteht

$$\frac{\partial}{\partial p_s}\left(\frac{d\omega_1}{dt_1}\right) - \frac{d}{dt_1}\frac{\partial}{\partial p_s^{10}}\left(\frac{d\omega_1}{dt_1}\right) - \frac{d}{dt_2}\frac{\partial}{\partial p_s^{01}}\left(\frac{d\omega_1}{dt_1}\right) + \frac{d^2}{dt_1^2}\frac{\partial}{\partial p_s^{20}}\left(\frac{d\omega_1}{dt_1}\right)$$

$$+ \frac{d^2}{dt_1\,dt_2}\frac{\partial}{\partial p_s^{11}}\left(\frac{d\omega_1}{dt_1}\right) + \frac{d^2}{dt_2^2}\frac{\partial}{\partial p_s^{02}}\left(\frac{d\omega_1}{dt_1}\right) = 0,$$

und dasselbe gilt für die Differentialquotienten $\frac{d\omega_2}{dt_2}, \ldots, \frac{d\omega_\varkappa}{dt_\varkappa}$, woraus also folgt, dass f selbst einer solchen Differentialgleichung identisch genügt, und da diese Function nur die ersten partiellen Differentialquotienten der Grössen $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ enthalten sollte, ***dass die nothwendige Bedingung dafür, dass eine Function***

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_\varkappa, p_1, p_2, \ldots, p_\mu, \ldots, p_a^{(10\ldots0)}, p_a^{(01\ldots0)}, \ldots, p_a^{(00\ldots1)}, \ldots)$$

sich identisch additiv durch die nach $t_1, t_2, \ldots, t_\varkappa$ genommenen Differentialquotienten der gleichartigen Functionen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\varkappa$ in der Form darstellen lässt

$$f = \frac{d\omega_1}{dt} + \frac{d\omega_2}{dt} + \cdots + \frac{d\omega_\varkappa}{dt} + \omega,$$

worin ω nur von $t_1, t_2, \ldots, t_\varkappa$ abhängt, die ist, dass die Function f der partiellen Differentialgleichung

$$(9.) \qquad \frac{\partial f}{\partial p_s} - \frac{d}{dt_1}\frac{\partial f}{\partial p_s^{(10\ldots0)}} - \frac{d}{dt_2}\frac{\partial f}{\partial p_s^{(01\ldots0)}} - \cdots - \frac{d}{dt_\varkappa}\frac{\partial f}{\partial p_s^{(00\ldots1)}} = 0$$

für jedes $s = 1, 2, \ldots, \mu$ identisch Genüge leistet.

Es soll nun aber auch gezeigt werden, dass, wenn f die Differentialgleichung (9.) identisch befriedigt, auch umgekehrt die Darstellung (8.) von f nothwendig daraus folgt — und zwar soll der Beweis dieses in anderer Form bereits bekannten Umkehrungsatzes mit Hülfe der Beziehungen der beiden ersten Hülfsätze begründet werden, sowie es für die weiteren Anwendungen dieses Satzes zweckmässig erscheint.

Zunächst ist aus der Form der Differentialgleichung (9.) unmittelbar ersichtlich, dass für gleiche oder verschiedene Indices s und σ die identischen Beziehungen bestehen müssen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p_s^{(10\ldots0)}\partial p_\sigma^{(10\ldots0)}} = \frac{\partial^2 f}{\partial p_s^{(01\ldots0)}\partial p_\sigma^{(01\ldots0)}} = \cdots = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p_s^{(10\ldots0)}\partial p_\sigma^{(01\ldots0)}} + \frac{\partial^2 f}{\partial p_s^{(01\ldots0)}\partial p_\sigma^{(10\ldots0)}}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial p_s^{(10\ldots0)}\partial p_\sigma^{(001\ldots0)}} + \frac{\partial^2 f}{\partial p_s^{(001\ldots0)}\partial p_\sigma^{(10\ldots0)}} = \cdots = 0,$$

und dass sich somit für f die Form ergiebt

$$(10.) \quad \left\{\begin{aligned} f = {} & \sum_1^\mu{}_\varrho \varphi_\varrho(t_1, \ldots, t_\varkappa, p_1, \ldots, p_\mu)\, p_\varrho^{(10\ldots0)} \\ & + \sum_1^\mu{}_\varrho \psi_\varrho(t_1, \ldots, t_\varkappa, p_1, \ldots, p_\mu)\, p_\varrho^{(01\ldots0)} + \cdots + \sum_1^\mu{}_\varrho \chi_\varrho(t_1, \ldots, t_\varkappa, p_1, \ldots, p_\mu)\, p_\varrho^{(00\ldots1)} \\ & + \sum_{1}^{\mu}{}_{\varrho,\sigma} \omega_{\varrho\sigma}^{(12)}(t_1, \ldots, t_\varkappa, p_1, \ldots, p_\mu)\,(p_\varrho^{(10\ldots0)} p_\sigma^{(01\ldots0)} - p_\varrho^{(01\ldots0)} p_\sigma^{(10\ldots0)}) \\ & \quad + \sum_{1}^{\mu}{}_{\varrho,\sigma} \omega_{\varrho\sigma}^{(13)}(t_1, \ldots, t_\varkappa, p_1, \ldots, p_\mu)\,(p_\varrho^{(10\ldots0)} p_\sigma^{(001\ldots0)} - p_\varrho^{(001\ldots0)} p_\sigma^{(10\ldots0)}) \\ & + \cdots + \sum_{1}^{\mu}{}_{\varrho,\sigma} \omega_{\varrho\sigma}^{(23)}(t_1, \ldots, t_\varkappa, p_1, \ldots, p_\mu)\,(p_\varrho^{(01\ldots0)} p_\sigma^{(001\ldots0)} - p_\varrho^{(001\ldots0)} p_\sigma^{(01\ldots0)}) \\ & \qquad + \cdots + \omega(t_1, \ldots, t_\varkappa, p_1, \ldots, p_\mu), \end{aligned}\right.$$

worin $\sigma > \varrho$ zu nehmen ist. Setzt man diesen Werth von f in die Differentialgleichung (9.) ein und bestimmt für verschiedene ϱ und σ

$$\omega_{\sigma\varrho}^{(\alpha\beta)} = -\omega_{\sigma\varrho}^{(\alpha\beta)}, \qquad \omega_{\varrho\sigma}^{(\alpha\beta)} = -\omega_{\varrho\sigma}^{(\beta\alpha)},$$

so ergiebt sich aus der identisch zu befriedigenden Gleichung

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial p_s} - \frac{d}{dt_1}\left\{\varphi_s + \sum_1^{\mu}{}_\sigma\,(\omega_{s\sigma}^{(12)} p_\sigma^{(01\ldots0)} + \omega_{s\sigma}^{(13)} p_\sigma^{(001\ldots0)} + \cdots)\right\} \\
&\quad - \frac{d}{dt_2}\left\{\psi_s + \sum_1^{\mu}{}_\sigma\,(\omega_{s\sigma}^{(21)} p_\sigma^{(10\ldots0)} + \omega_{s\sigma}^{(23)} p_\sigma^{(001\ldots0)} + \cdots)\right\} \\
&\quad - \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad - \frac{d}{dt_\varkappa}\left\{\chi_s + \sum_1^{\mu}{}_\sigma\,(\omega_{s\sigma}^{(\varkappa 1)} p_\sigma^{(10\ldots0)} + \omega_{s\sigma}^{(\varkappa 2)} p_\sigma^{(01\ldots0)} + \cdots)\right\} = 0,
\end{aligned}$$

indem man die Coefficienten von

$$p_\varrho^{(10\ldots0)}, p_\varrho^{(01\ldots0)}, \ldots, p_\varrho^{(10\ldots0)} p_\sigma^{(01\ldots0)} - p_\varrho^{(01\ldots0)} p_\sigma^{(10\ldots0)}, \ldots$$

gleich Null setzt, für die in (10.) vorkommenden Functionen der t und p die Reihe der nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass f der Differentialgleichung (9.) identisch genügen soll, in der Form

$$\text{(11.)}\qquad \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial p_s} = \frac{\partial \varphi_s}{\partial p_\varrho} + \frac{\partial \omega_{s\varrho}^{(21)}}{\partial t_2} + \frac{\partial \omega_{s\varrho}^{(31)}}{\partial t_3} + \cdots + \frac{\partial \omega_{s\varrho}^{(\varkappa 1)}}{\partial t_\varkappa},$$

$$\text{(12.)}\qquad \frac{\partial \psi_\varrho}{\partial p_s} = \frac{\partial \psi_s}{\partial p_\varrho} + \frac{\partial \omega_{s\varrho}^{(12)}}{\partial t_1} + \frac{\partial \omega_{s\varrho}^{(32)}}{\partial t_3} + \cdots + \frac{\partial \omega_{s\varrho}^{(\varkappa 2)}}{\partial t_\varkappa},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{(13.)}\qquad \frac{\partial \chi_\varrho}{\partial p_s} = \frac{\partial \chi_s}{\partial p_\varrho} + \frac{\partial \omega_{s\varrho}^{(1\varkappa)}}{\partial t_1} + \frac{\partial \omega_{s\varrho}^{(2\varkappa)}}{\partial t_2} + \cdots + \frac{\partial \omega_{s\varrho}^{(\varkappa-1\,\varkappa)}}{\partial t_{\varkappa-1}},$$

$$\text{(14.)}\qquad \frac{\partial \varphi_s}{\partial t_1} + \frac{\partial \psi_s}{\partial t_2} + \cdots + \frac{\partial \chi_s}{\partial t_\varkappa} = \frac{\partial \omega}{\partial p_s},$$

$$\text{(15.)}\qquad \frac{\partial \omega_{\varrho\sigma}^{(\alpha\beta)}}{\partial p_s} = \frac{\partial \omega_{s\sigma}^{(\alpha\beta)}}{\partial p_\varrho} + \frac{\partial \omega_{s\varrho}^{(\alpha\beta)}}{\partial p_\sigma},$$

worin für s die Werthe $1, 2, \ldots, \mu$ zu setzen sind.

Bildet man nun die Ausdrücke

$$\text{(16.)}\qquad \left\{\begin{aligned}
\Omega_1 &= \int\Big\{\varphi_1\,dp_1 + \Big[\varphi_2 + \int\Big(\frac{\partial \omega_{21}^{(21)}}{\partial t_2} + \frac{\partial \omega_{21}^{(31)}}{\partial t_3} + \cdots + \frac{\partial \omega_{21}^{(\varkappa 1)}}{\partial t_\varkappa}\Big)dp_1\Big]dp_2 \\
&\qquad + \Big[\varphi_3 + \int\Big(\frac{\partial \omega_{31}^{(21)}}{\partial t_2} + \frac{\partial \omega_{31}^{(31)}}{\partial t_3} + \cdots + \frac{\partial \omega_{31}^{(\varkappa 1)}}{\partial t_\varkappa}\Big)dp_1\Big]dp_3 + \cdots\Big\}, \\
\Omega_2 &= \int\Big\{\psi_1\,dp_1 + \Big[\psi_2 + \int\Big(\frac{\partial \omega_{21}^{(12)}}{\partial t_1} + \frac{\partial \omega_{21}^{(32)}}{\partial t_3} + \cdots\Big)dp_1\Big]dp_2 \\
&\qquad + \Big[\psi_3 + \int\Big(\frac{\partial \omega_{31}^{(12)}}{\partial t_1} + \frac{\partial \omega_1^{(32)}}{\partial t_3} + \cdots\Big)dp_1\Big]dp_3 + \cdots\Big\}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\Omega_\varkappa &= \int\Big\{\chi_1\,dp_1 + \Big[\chi_2 + \int\Big(\frac{\partial \omega_{21}^{(1\varkappa)}}{\partial t_1} + \frac{\partial \omega_{21}^{(2\varkappa)}}{\partial t_2} + \cdots\Big)dp_1\Big]dp_2 + \cdots\Big\},
\end{aligned}\right.$$

so ist leicht ersichtlich, dass unter den Integralen derselben vermöge der Bedingungsgleichungen (11.) bis (15.) vollständige Differentialausdrücke der Variabeln $p_1, \ldots, p_\mu$ stehen, und eine einfache Ausführung zeigt die Identität der Gleichung

$$(17.)\quad \begin{cases} f - \dfrac{d\,(\Omega_1 + \Sigma_{\varrho,\sigma}^{(\sigma=|=1)} p_\sigma^{(01\ldots0)} \int \omega_{\varrho\sigma}^{(12)}\, dp_\varrho + \Sigma_{\varrho,\sigma}^{(\sigma=|=1)} p_\sigma^{(001\ldots0)} \int \omega_{\varrho\sigma}^{(13)}\, dp_\varrho + \cdots)}{dt_1} \\ \quad - \dfrac{d\,(\Omega_2 + \Sigma_{\varrho,\sigma}^{(\sigma=|=2)} p_\sigma^{(10\ldots0)} \int \omega_{\varrho\sigma}^{(21)}\, dp_\varrho + \Sigma_{\varrho,\sigma}^{(\sigma=|=2)} p_\sigma^{(001\ldots0)} \int \omega_{\varrho\sigma}^{(23)}\, dp_\varrho + \cdots)}{dt_2} - \cdots \\ = -\dfrac{\partial \Omega_1}{\partial t_1} - \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial t_2} - \cdots - \dfrac{\partial \Omega_\varkappa}{\partial t_\varkappa} + \omega. \end{cases}$$

Da aber aus den Definitionsgleichungen (16.) der Ω folgt, dass

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial t_1} = \int \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}\, dp_1 + \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} + \int \left(\frac{\partial^2 \omega_{21}^{(21)}}{\partial t_2 \partial t_1} + \frac{\partial \omega_{21}^{(31)}}{\partial t_3 \partial t_1} + \cdots \right) dp_1 \right] dp_2 + \cdots \right\},$$

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial t_2} = \int \left\{ \frac{\partial \psi_1}{\partial t_2}\, dp_1 + \left[\frac{\partial \psi_2}{\partial t_2} + \int \left(\frac{\partial^2 \omega_{21}^{(12)}}{\partial t_1 \partial t_2} + \frac{\partial^2 \omega_{21}^{(32)}}{\partial t_3 \partial t_2} + \cdots \right) dp_1 \right] dp_2 + \cdots \right\},$$

. . . . . .

ist, sich also durch Addition

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial t_1} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial t_2} + \cdots = \int \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} + \frac{\partial \psi_1}{\partial t_2} + \cdots \right) dp_1 + \int \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial t_2} + \cdots \right) dp_2 + \cdots$$

oder vermöge der Gleichung (14.)

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial t_1} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial t_2} + \cdots = \int \left(\frac{\partial \omega}{\partial p_1}\, dp_1 + \frac{\partial \omega}{\partial p_2}\, dp_2 + \cdots \right) = \omega - F(t_1, t_2, \ldots, t_\varkappa)$$

ergiebt, worin F eine willkürliche Function von $t_1, t_2, \ldots, t_\varkappa$ bedeutet, so erhält man, wenn

$$(18.)\quad \begin{cases} K_1 = \Omega_1 + \Sigma_{\varrho,\sigma}^{(\sigma=|=1)} \left\{ p_\sigma^{(01\ldots0)} \int \omega_{\varrho\sigma}^{(12)}\, dp_\varrho + p_\sigma^{(001\ldots0)} \int \omega_{\varrho\sigma}^{(13)}\, dp_\varrho + \cdots \right\}, \\ K_2 = \Omega_2 + \Sigma_{\varrho,\sigma}^{(\sigma=|=1)} \left\{ p_\sigma^{(10\ldots0)} \int \omega_{\varrho\sigma}^{(21)}\, dp_\varrho + p_\sigma^{(001\ldots0)} \int \omega_{\varrho\sigma}^{(23)}\, dp_\varrho + \cdots \right\}, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{cases}$$

gesetzt wird, vermöge (17.) die Beziehung

$$(19.)\qquad f = \frac{dK_1}{dt_1} + \frac{dK_2}{dt_2} + \cdots + \frac{dK_\varkappa}{dt_\varkappa} + F(t_1, t_2, \ldots, t_\varkappa),$$

und es folgt somit der Satz, *dass die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Function*

$$f(t_1, \ldots, t_\varkappa, p_1, \ldots, p_\mu, \ldots, p_\alpha^{(10\ldots0)}, p_\alpha^{(01\ldots0)}, \ldots, p_\alpha^{(00\ldots1)}, \ldots)$$

sich als eine Summe von totalen nach $t_1, t_2, \ldots, t_\varkappa$ ***genommenen Differentialquotienten von Functionen der*** t, p ***und deren ersten partiellen Differentialquotienten in der Form*** (19.) ***darstellen lässt, die ist, dass*** f ***der partiellen Differentialgleichung*** (9.) ***identisch Genüge leistet.****)

Dass sich dann das $\varkappa$-fache Integral

$$\int_{t_1^0}^{t_1^1}\int_{t_2^0}^{t_2^1}\cdots\int_{t_\varkappa^0}^{t_\varkappa^1} f\,dt_\varkappa\,dt_{\varkappa-1}\ldots dt_1$$

— und so ist dieser Satz als eine Anwendung der Variationsrechnung schon angeführt worden — von einem $\varkappa$-fachen Integrale einer nur von den t-Variablen abhängigen Function abgesehen, auf $(\varkappa-1)$-fache Integrale zurückführen lässt, ist unmittelbar ersichtlich, da, wenn der Kürze halber

$$f = \frac{dK_1}{dt_1} + \frac{dK_2}{dt_2} + F(t_1, t_2)$$

angenommen wird, aus

$$\int_{t_2^0}^{t_2^1} f\,dt_2 = \int_{t_2^0}^{t_2^1} \frac{dK_1}{dt_1}\,dt_2 + [K_2]_{t_2^0}^{t_2^1} + \int_{t_2^0}^{t_2^1} F(t_1, t_2)\,dt_2,$$

weil

$$\frac{d}{dt_1}\int_{t_2^0}^{t_2^1} K_1\,dt_2 = \int_{t_2^0}^{t_2^1} \frac{dK_1}{dt_1}\,dt_2 + \left[K_1\frac{dt_2}{dt_1}\right]_{t_2^0}^{t_2^1}$$

ist, sich durch Integration nach t_1

---

*) So werden

$$\varphi_1 = t_1 p_2,\quad \varphi_2 = t_2 p_2,\quad \psi_1 = t_1^2 p_1,\quad \psi_2 = t_2 p_1,\quad \omega_{12}^{(12)} = t_1 t_2,\quad \omega = p_1 p_2$$

den Gleichungen (11.), (12.) und (14.) identisch genügen, und es wird sich somit das identische Integral

$$f = t_1 p_2 p_1^{10} + t_2 p_2 p_2^{10} + t_1^2 p_1 p_1^{01} + t_2 p_1 p_2^{01} + t_1 t_2 (p_1^{10} p_2^{01} - p_1^{01} p_2^{10}) + p_1 p_2$$

der Differentialgleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial p_1} - \frac{d}{dt_1}\frac{\partial f}{\partial p_1^{10}} - \frac{d}{dt_2}\frac{\partial f}{\partial p_1^{01}} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial p_2} - \frac{d}{dt_1}\frac{\partial f}{\partial p_2^{10}} - \frac{d}{dt_2}\frac{\partial f}{\partial p_2^{01}} = 0$$

in die Form setzen lassen

$$f = \frac{d}{dt_1}\left(t_1 p_1 p_2 + \tfrac{1}{2} t_2 p_2^2 + t_1 t_2 p_1 p_2^{01}\right) + \frac{d}{dt_2}\left(\tfrac{1}{2} t_1^2 p_1^2 - t_1 t_2 p_1 p_2^{10}\right).$$

$$\int_{t_1^0}^{t_1^1}\int_{t_2^0}^{t_2^1} f\,dt_2\,dt_1 = \Big[\int_{t_2^0}^{t_2^1} K_1\,dt_2\Big]_{t_1^0}^{t_1^1} - \int_{t_1^0}^{t_1^1}\Big[K_1\frac{dt_2}{dt_1}\Big]_{t_2^0}^{t_2^1} dt_1$$
$$+ \int_{t_1^0}^{t_1^1} [K_2]_{t_2^0}^{t_2^1}\,dt_1 + \int_{t_1^0}^{t_1^1}\int_{t_2^0}^{t_2^1} F(t_1, t_2)\,dt_2\,dt_1$$

ergiebt.*)

Um die Gültigkeit des oben bewiesenen Satzes auch für Functionen festzustellen, welche partielle Differentialquotienten beliebig hoher Ordnungen enthalten, wird es zum Zwecke der nachfolgenden Anwendungen genügen, Functionen von der Form

$$f(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t)$$

zu betrachten, in welchen wir die Variabeln und deren partielle Ableitungen, um die Indices zu vermeiden, in bekannter Weise bezeichnen.

Zunächst ist wieder leicht zu sehen, dass ein Ausdruck von der Form

$$\frac{d\omega_1(x, y, z, p, q, r, s, t)}{dx} \quad \text{oder} \quad \frac{d\omega_2(x, y, z, p, q, r, s, t)}{dy}$$

vermöge der aus den Beziehungen I. bis VI. folgenden Relationen

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{d\omega_1}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{\partial\omega_1}{\partial z},\quad \frac{\partial}{\partial p}\frac{d\omega_1}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{\partial\omega_1}{\partial p} + \frac{\partial\omega_1}{\partial z},\quad \frac{\partial}{\partial q}\frac{d\omega_1}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{\partial\omega_1}{\partial q}$$
$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{d\omega_1}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{\partial\omega_1}{\partial r} + \frac{\partial\omega_1}{\partial p},\quad \frac{\partial}{\partial s}\frac{d\omega_1}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{\partial\omega_1}{\partial s} + \frac{\partial\omega_1}{\partial q},\quad \frac{\partial}{\partial t}\frac{d\omega_1}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{\partial\omega_1}{\partial t},$$

und weil die Coefficienten der dritten partiellen Ableitungen von z in $\frac{d\omega_1}{dx}$ durch $\frac{\partial\omega_1}{\partial r}, \frac{\partial\omega_1}{\partial s}, \frac{\partial\omega_1}{\partial t}, 0$ gegeben sind, die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\Phi}{\partial p} - \frac{d}{dy}\frac{\partial\Phi}{\partial q} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{d^2}{dx\,dy}\frac{\partial\Phi}{\partial s} + \frac{d^2}{dy^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$
$$+ \frac{d^3}{dx^3}\frac{\partial\Phi}{\partial r^{10}} + \frac{d^3}{dx^2\,dy}\frac{\partial\Phi}{\partial r^{01}} + \frac{d^3}{dx\,dy^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t^{10}} + \frac{d^3}{dy^3}\frac{\partial\Phi}{\partial t^{01}} = 0,$$

*) So erhält man

$$\int_{t_1^0}^{t_1^1}\int_{t_2^0}^{t_2^1} [(t_1 + p_1)\,p_1^{10} + (t_2 + p_1)\,p_1^{01} + 2p_1]\,dt_2\,dt_1 = \Big[\int_{t_2^0}^{t_2^1} (t_1 p_1 + \tfrac{1}{2}p_1^2)\,dt_2)\Big]_{t_1^0}^{t_1^1}$$
$$- \int_{t_1^0}^{t_1^1}\Big[(t_1 p_1 + \tfrac{1}{2}p_1^2)\frac{dt_2}{dt_1}\Big]_{t_2^0}^{t_2^1} dt_1 + \int_{t_1^0}^{t_1^1} [t_2 p_1 + \tfrac{1}{2}p_1^2]_{t_2^0}^{t_2^1}\,dt_1.$$

in welcher

$$r^{10} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3},\ r^{01} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y},\ t^{10} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2},\ t^{01} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

ist, identisch befriedigt, und ***dass somit jede in der Form***

$$(20.)\quad f(x, y, z, p, q, r, s, t) = \frac{d\omega_1(x, y, z, p, q, r, s, t)}{dx} + \frac{d\omega_2(x, y, z, p, q, r, s, t)}{dy} + F(x, y, z, p, q)$$

darstellbare Function f, da die dritten partiellen Ableitungen in derselben nicht vorkommen sollen, ***wenn*** $F(x, y, z, p, q)$ ***eine durch totale nach*** x ***und*** y ***genommene Differentialquotienten von Functionen von*** x, y, z, p, q ***darstellbare Function bedeutet***, die somit nach dem Vorigen die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{d}{dy}\frac{\partial F}{\partial q} = 0$$

identisch befriedigt, ***der partiellen Differentialgleichung***

$$(21.)\quad \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{d^2}{dx\,dy}\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{d^2}{dy^2}\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Genüge leistet.

Aber es soll nun auch die Gültigkeit der Umkehrung dieses Satzes bewiesen werden. Zunächst ist ersichtlich, dass, wenn eine Function f der Differentialgleichung (21.) identisch genügen soll, daraus, dass die Coefficienten der partiellen Differentialquotienten vierter Ordnung von z verschwinden müssen, die identischen Beziehungen folgen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = 0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial s} = 0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial s\,\partial t} = 0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial t} = 0,$$

und somit f die Form haben muss

$$(22.)\quad \begin{cases} f = r\varphi(x, y, z, p, q) + s\psi(x, y, z, p, q) + t\chi(x, y, z, p, q) \\ \qquad + (rt - s^2)\omega(x, y, z, p, q) + \omega_1(x, y, z, p, q). \end{cases}$$

Setzt man nun, um die weiteren Beziehungen zwischen den Functionen $\varphi, \psi, \chi, \omega$ und ω_1 zu ermitteln, diesen Werth von f in die Differentialgleichung (21.) ein, so fallen ausser den vierten auch alle dritten Differentialquotienten von z heraus, ferner alle Posten, welche r, s, t in höherer Dimension enthalten als in der zweiten, endlich verschwinden auch die Coefficienten von $r^2, t^2, rs, st,$ und es muss somit, da f der partiellen Differential-

gleichung identisch genügen soll, und diese die Form annimmt

$$A(rt-s^2)+Br+Cs+Dt+E=0,$$

der den Grössen s^2 und rt gemeinsame Coefficient

$$(23.)\quad A=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}-\frac{\partial^2\chi}{\partial p^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial p}+p\frac{\partial^2\omega}{\partial z\partial p}+3\frac{\partial\omega}{\partial z}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y\partial q}+q\frac{\partial^2\omega}{\partial z\partial q}+\frac{\partial^2\psi}{\partial p\partial q}=0$$

sein, während die Coefficienten von r, s, t und das von den zweiten Differentialquotienten freie Glied die Gleichungen liefern

$$(24.)\quad \left\{\begin{aligned} B=&-\frac{\partial^2\omega_1}{\partial p^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial q\partial y}-q\frac{\partial^2\varphi}{\partial q\partial z}+\frac{\partial^2\omega}{\partial q^2}+2q\frac{\partial^2\omega}{\partial y\partial z}+q\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}\\ &\frac{\partial^2\psi}{\partial p\partial y}+q\frac{\partial^2\psi}{\partial p\partial z}+2\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial x}+p\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial z}=0,\end{aligned}\right.$$

$$(25.)\quad \left\{\begin{aligned} C=&\frac{\partial^2\varphi}{\partial q\partial x}+p\frac{\partial^2\varphi}{\partial q\partial z}+\frac{\partial^2\chi}{\partial y\partial p}+q\frac{\partial^2\chi}{\partial z\partial p}+\frac{\partial\psi}{\partial z}-\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}\\ &-q\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial z}-p\frac{\partial^2\omega}{\partial z\partial y}-pq\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\omega_1}{\partial p\partial q}=0,\end{aligned}\right.$$

$$(26.)\quad \left\{\begin{aligned} D=&-\frac{\partial^2\chi}{\partial p\partial x}-p\frac{\partial^2\chi}{\partial p\partial z}-\frac{\partial^2\omega_1}{\partial q^2}+2\frac{\partial\chi}{\partial z}+\frac{\partial^2\chi}{\partial q\partial y}+q\frac{\partial^2\chi}{\partial q\partial z}\\ &\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial q}+p\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial q}+\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+2p\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial z}+p^2\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}=0,\end{aligned}\right.$$

$$(27.)\quad \left\{\begin{aligned} E=&-\frac{\partial^2\omega_1}{\partial p\partial x}-p\frac{\partial^2\omega_1}{\partial p\partial z}-\frac{\partial^2\omega_1}{\partial q\partial y}-q\frac{\partial^2\omega_1}{\partial q\partial z}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2p\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}\\ &+p^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}+2q\frac{\partial^2\chi}{\partial y\partial z}+q^2\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\\ &+q\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}+p\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z}+pq\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{\partial\omega_1}{\partial z}=0,\end{aligned}\right.$$

und alle diese Gleichungen (23.) bis (27.) müssen identisch befriedigt sein, damit (22.) der Differentialgleichung (21.) identisch Genüge leistet.

Wenn es nun möglich ist, eine Function F von der Form

$$(28.)\quad \left\{\begin{aligned} F=&r\varphi(x,y,z,p,q)+s\psi(x,y,z,p,q)+t\chi(x,y,z,p,q)\\ &+(rt-s^2)\omega(x,y,z,p,q)+\omega_2(x,y,z,p,q)\end{aligned}\right.$$

zu bestimmen, in welcher $\varphi, \psi, \chi, \omega$ die in f gegebenen Functionen sind, welche den Gleichungen (23.) bis (27.) genügen, und welche die Eigenschaft hat, dass sie sich durch totale nach x und y genommene Differentialquotienten in der Form darstellen lässt

$$(29.)\quad F=\frac{d\Omega_1(x,y,z,p,q,r,s,t)}{dx}+\frac{d\Omega_2(x,y,z,p,q,r,s,t)}{dy}+\Omega_3(x,y,z,p,q),$$

worin Ω_3 in gleicher Weise in zwei nach x und y genommene totale Differentialquotienten von Functionen von x, y, z, p, q zerlegbar ist, so wird auch F der für f vorausgesetzten partiellen Differentialgleichung (21.) identisch Genüge leisten und

$$(30.) \qquad f - F = \omega_1 - \Omega_3 = \omega_3 (x, y, z, p, q)$$

die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \omega_3}{\partial p} - \frac{d}{dy}\frac{\partial \omega_3}{\partial q} = 0$$

identisch befriedigen, woraus die Zerlegung von ω_3 in totale Differentialquotienten, und daher für f nach Gleichung (30.) die zu beweisende Zerlegung sich in der Form ergeben würde

$$f = \frac{d\Omega_1 (x, y, z, p, q, r, s, t)}{dx} + \frac{d\Omega_2 (x, y, z, p, q, r, s, t)}{dy} + \frac{d\omega_4 (x, y, z, p, q)}{dx} + \frac{d\omega_5 (x, y, z, p, q)}{dy} + \bar{\Omega}(x, y)$$

oder

$$f = \frac{d\bar{\Omega}_1 (x, y, z, p, q, r, s, t)}{dx} + \frac{d\bar{\Omega}_2 (x, y, z, p, q, r, s, t)}{dy} + \bar{\Omega}(x, y).$$

Um nun den Bedingungen der Gleichungen (23.) bis (27.) gemäss eine Function F von der Form (28.) und der Zerlegbarkeit (29.) zu bestimmen, bilde man zunächst aus den Beziehungen

$$\frac{d}{dx}\int \varphi\, dp = \int \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dp + p\int \frac{\partial \varphi}{\partial z}\, dp + r\varphi + s\int \frac{\partial \varphi}{\partial q}\, dp,$$

$$\frac{d}{dy}\int \chi\, dq = \int \frac{\partial \chi}{\partial y}\, dq + q\int \frac{\partial \chi}{\partial z}\, dq + s\int \frac{\partial \chi}{\partial p}\, dq + t\chi$$

die Differenz

$$f - \frac{d}{dx}\int \varphi\, dp - \frac{d}{dy}\int \chi\, dq = s\left(\psi - \int \frac{\partial \varphi}{\partial q}\, dp - \int \frac{\partial \chi}{\partial p}\, dq\right) + \omega (rt - s^2) + \bar{\omega}_1 (x, y, z, p, q),$$

oder da

$$\frac{d}{dx}\left(s\int \omega\, dq\right) = \frac{ds}{dx}\int \omega\, dq + s\left(\int \frac{\partial \omega}{\partial x}\, dq + p\int \frac{\partial \omega}{\partial z}\, dq + r\int \frac{\partial \omega}{\partial p}\, dq + \omega s\right),$$

$$\frac{d}{dy}\left(r\int \omega\, dq\right) = \frac{dr}{dy}\int \omega\, dq + r\left(\int \frac{\partial \omega}{\partial y}\, dq + q\int \frac{\partial \omega}{\partial z}\, dq + s\int \frac{\partial \omega}{\partial p}\, dq + \omega t\right)$$

ist, den Ausdruck

$$(31.)\quad \begin{cases} f-\frac{d}{dx}\int\varphi\,dp-\frac{d}{dy}\int\chi\,dq+\frac{d}{dx}\left(s\int\omega\,dq\right)-\frac{d}{dy}\left(r\int\omega\,dq\right) \\ \qquad\qquad = Ms+Nr+\varpi_1, \end{cases}$$

worin

$$(32.)\qquad M=\psi-\int\frac{\partial\varphi}{\partial q}\,dp-\int\frac{\partial\chi}{\partial p}\,dq+\int\frac{\partial\omega}{\partial x}\,dq+p\int\frac{\partial\omega}{\partial z}\,dq,$$

$$(32.)\qquad N=-\int\frac{\partial\omega}{\partial y}\,dq-q\int\frac{\partial\omega}{\partial z}\,dq$$

ist.

Da aber der nach p und q genommene zweite Differentialquotient der Gleichung (32.)

$$\frac{\partial^2 M}{\partial p\,\partial q}=\frac{\partial^2\psi}{\partial p\,\partial q}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}-\frac{\partial^2\chi}{\partial p^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial p}+\frac{\partial\omega}{\partial z}+p\frac{\partial^2\omega}{\partial z\,\partial p}$$

vermöge der identisch befriedigten Gleichung (23.) in

$$\frac{\partial^2 M}{\partial p\,\partial q}=-2\frac{\partial\omega}{\partial z}-\frac{\partial^2\omega}{\partial y\,\partial q}-q\frac{\partial^2\omega}{\partial z\,\partial q}=\frac{\partial^2 N}{\partial q^2}$$

übergeht, so folgt

$$(34.)\qquad \frac{\partial M}{\partial p}-\frac{\partial N}{\partial q}=L(x,y,z,p),$$

und weil für eine beliebige Function $\Omega(x,y,z,p,q)$

$$\frac{d}{dx}\int\Omega\,dq=\int\frac{\partial\Omega}{\partial x}\,dq+p\int\frac{\partial\Omega}{\partial z}\,dq+r\int\frac{\partial\Omega}{\partial p}\,dq+\Omega s,$$

$$\frac{d}{dx}\int\Omega\,dp=\int\frac{\partial\Omega}{\partial x}\,dp+p\int\frac{\partial\Omega}{\partial z}\,dp+s\int\frac{\partial\Omega}{\partial q}\,dp+\Omega r$$

ist, so wird, wenn Ω durch die Gleichung

$$(35.)\qquad \Omega+\int\frac{\partial\Omega}{\partial p}\,dq=N\quad\text{oder}\quad\frac{\partial\Omega}{\partial p}+\frac{\partial\Omega}{\partial q}=\frac{\partial N}{\partial q}$$

bestimmt wird, sich aus (31.) die Beziehung ergeben

$$(36.)\quad \begin{cases} f-\frac{d}{dx}\int\varphi\,dp-\frac{d}{dy}\int\chi\,dq+\frac{d}{dx}\left(s\int\omega\,dq\right)-\frac{d}{dy}\left(r\int\omega\,dq\right) \\ \qquad -\frac{d}{dx}\int\Omega\,dq-\frac{d}{dx}\int\Omega\,dp=P.s+\varpi_2(x,y,z,p,q), \end{cases}$$

worin

$$P=M-\Omega-\int\frac{\partial\Omega}{\partial q}\,dp,$$

oder da nach (35.) und (34.)

$$\frac{\partial P}{\partial p} = \frac{\partial M}{\partial p} - \frac{\partial \Omega}{\partial p} - \frac{\partial \Omega}{\partial q} = \frac{\partial M}{\partial p} - \frac{\partial N}{\partial q} = L(x, y, z, p)$$

ist, P von der Form ist

$$P = L_1(x, y, z, p) + L_2(x, y, z, q). \tag{37.}$$

Nun ergeben aber endlich die Beziehungen

$$\frac{d}{dy}\int L_1 dp = \int \frac{\partial L_1}{\partial y} dp + q \int \frac{\partial L_1}{\partial z} dp + L_1 s,$$

$$\frac{d}{dx}\int L_2 dq = \int \frac{\partial L_2}{\partial x} dq + p \int \frac{\partial L_2}{\partial z} dq + L_2 s$$

nach (37.) die Gleichung

$$P.s = \frac{d}{dy}\int L_1 dp + \frac{d}{dx}\int L_2 dq - \int \frac{\partial L_1}{\partial y} dp - \int \frac{\partial L_2}{\partial x} dq$$
$$- q \int \frac{\partial L_1}{\partial z} dp - p \int \frac{\partial L_2}{\partial z} dq,$$

und es nimmt daher f nach (36.) die gesuchte Form an

$$f = \frac{d}{dx}\left\{\int \varphi dp + \int \Omega dq + \int \Omega dp + \int L_2 dq - s \int \omega dq\right\}$$
$$+ \frac{d}{dy}\left\{\int \chi dq + \int L_1 dp + r \int \omega dq\right\} + \omega_3(x, y, z, p, q),$$

worin, da ω_3 nach den obigen Auseinandersetzungen der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \omega_3}{\partial p} - \frac{d}{dy}\frac{\partial \omega_3}{\partial q} = 0$$

identisch genügt, auch ω_3 die Gestalt hat

$$\omega_3 = \frac{d\Omega_1(x, y, z, p, q)}{dx} + \frac{d\Omega_2(x, y, z, p, q)}{dy} + \lambda(x, y),$$

und daher

$$f = \frac{d}{dx}\left\{\int \varphi dp + \int \Omega dq + \int \Omega dp + \int L_2 dq + \Omega_1 - s \int \omega dq\right\}$$
$$+ \frac{d}{dy}\left\{\int \chi dq + \int L_1 dp + \Omega_2 + r \int \omega dq\right\} + \lambda(x, y)$$

wird. Wir finden somit,

dass die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Function $f(x, y, z, p, q, r, s, t)$ *in der Form darstellbar ist*

$$f = \frac{d\omega_1(x, y, z, p, q, r, s, t)}{dx} + \frac{d\omega_2(x, y, z, p, q, r, s, t)}{dy} + F(x, y),$$

die ist, dass f *der partiellen Differentialgleichung*

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{d^2}{dx\,dy}\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{d^2}{dy^2}\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

*identisch genügt.**)

Hülfsatz 4.

Um unter sogleich näher anzugebenden Bedingungen den Existenzbeweis eines kinetischen Potentials von beliebig vielen unabhängigen und abhängigen Variabeln zu führen, wird es mit Rücksicht auf die späteren Anwendungen genügen, *die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufzustellen, dass* μ *Functionen* $N_1, N_2, \ldots N_\mu$ *von* $t, u, p_1, p_2, \ldots p_\mu$ *und deren Ableitungen existiren, welche durch ein und dieselbe Function*

$$M \text{ von } t, u, p_1, p_2, \ldots p_\mu, p_1^{(10)}, p_2^{(10)}, \ldots p_\mu^{(10)}, p_1^{(01)}, p_2^{(01)}, \ldots p_\mu^{(01)}$$

sich in der Form ausdrücken lassen

$$(38.) \qquad N_\varkappa = \frac{\partial M}{\partial p_\varkappa} - \frac{d}{dt}\frac{\partial M}{\partial p_\varkappa^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial M}{dp_\varkappa^{(01)}} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots \mu).$$

Um zunächst nothwendige Bedingungen für $N_\varkappa$ aufzustellen, sei bemerkt, dass aus der Form (38.) unmittelbar ersichtlich ist, *dass* $N_\varkappa$ *die Ableitungen* $p^{(20)}, p^{(11)}, p^{(02)}$ *nur linear enthalten kann;* ferner ergiebt sich aus

$$(39.) \qquad \frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(20)}} = -\frac{\partial^2 M}{\partial p_\varkappa^{(10)}\,\partial p_\lambda^{(10)}}$$

die Beziehung

$$(40.) \qquad \frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(20)}} = \frac{\partial N_\lambda}{\partial p_\varkappa^{(20)}},$$

und ähnlich

$$(41.) \qquad \frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(02)}} = \frac{\partial N_\lambda}{\partial p_\varkappa^{(02)}},$$

---

*) So läst sich das identische Integral

$$f = yz + xyp + p^3 + 2zq + r(2pz - x) + s(2qy + y + qx + q) + t(px - p) + rt - s^2$$

der obigen partiellen Differentialgleichung in die Form umsetzen

$$f = \frac{d(xyz + p^2z + q^2y + xys - zt + pt)}{dx} + \frac{d(z^2 + pqx - xyr + zs - ps)}{dy}.$$

sowie wegen

$$(42.)\qquad \frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(11)}} = -\frac{\partial^2 M}{\partial p_\varkappa^{(01)}\,\partial p_\lambda^{(01)}} - \frac{\partial^2 M}{\partial p_\varkappa^{(01)}\,\partial p_\lambda^{(10)}}$$

die Beziehung

$$(43.)\qquad \frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(11)}} = \frac{\partial N_\lambda}{\partial p_\varkappa^{(11)}}.$$

Da ferner

$$\frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(10)}} = \frac{\partial^2 M}{\partial p_\varkappa\,\partial p_\lambda^{(10)}} - \frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(10)}}\,\frac{d}{dt}\,\frac{\partial M}{\partial p_\varkappa^{(10)}} - \frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(10)}}\,\frac{d}{du}\,\frac{\partial M}{\partial p_\varkappa^{(01)}}$$

oder nach II. und III. des ersten Hülfsatzes

$$(44.)\qquad \frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(10)}} = \frac{\partial^2 M}{\partial p_\varkappa\,\partial p_\lambda^{(10)}} - \frac{\partial^2 M}{\partial p_\varkappa^{(10)}\,\partial p_\lambda} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial^2 M}{\partial p_\varkappa^{(10)}\,\partial p_\lambda^{(10)}} - \frac{d}{du}\,\frac{\partial^2 M}{\partial p_\varkappa^{(01)}\,\partial p_\lambda^{(10)}}$$

ist, so liefert die Vertauschung von $\varkappa$ und λ die Gleichung

$$\frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(10)}} + \frac{\partial N_\lambda}{\partial p_\varkappa^{(10)}} = -2\,\frac{d}{dt}\,\frac{\partial^2 M}{\partial p_\varkappa^{(10)}\,\partial p_\lambda^{(10)}} - \frac{d}{du}\,\frac{\partial^2 M}{\partial p_\varkappa^{(01)}\,\partial p_\lambda^{(10)}} - \frac{d}{du}\,\frac{\partial^2 M}{\partial p_\lambda^{(01)}\,\partial p_\varkappa^{(10)}}$$

und somit nach (39.) und (42.) die Beziehung

$$(45.)\qquad \frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(10)}} - 2\,\frac{d}{dt}\,\frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(20)}} - \frac{d}{du}\,\frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(11)}} = -\frac{\partial N_\lambda}{\partial p_\varkappa^{(10)}},$$

worin $\varkappa$ gleich oder verschieden von λ zu nehmen ist, und genau in derselben Weise

$$\frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(01)}} + \frac{\partial N_\lambda}{\partial p_\varkappa^{(01)}} = -\frac{d}{dt}\,\frac{\partial^2 M}{\partial p_\varkappa^{(10)}\,\partial p_\lambda^{(01)}} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial^2 M}{\partial p_\lambda^{(10)}\,\partial p_\varkappa^{(01)}} - 2\,\frac{d}{du}\,\frac{\partial^2 M}{\partial p_\varkappa^{(01)}\,\partial p_\lambda^{(01)}},$$

woraus wieder

$$(46.)\qquad \frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(01)}} - 2\,\frac{d}{du}\,\frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(02)}} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(11)}} = -\frac{\partial N_\lambda}{\partial p_\varkappa^{(01)}}$$

folgt.

Endlich erhält man durch ähnliche Umformung

$$\frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial N_\lambda}{\partial p_\varkappa} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 M}{\partial p_\lambda^{(10)}\,\partial p_\varkappa} - \frac{\partial^2 M}{\partial p_\varkappa^{(10)}\,\partial p_\lambda}\right) + \frac{d}{du}\left(\frac{\partial^2 M}{\partial p_\lambda^{(01)}\,\partial p_\varkappa} - \frac{\partial^2 M}{\partial p_\varkappa^{(01)}\,\partial p_\lambda}\right)$$

und somit vermöge (44.) und die entsprechende Gleichung:

$$\frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial N_\lambda}{\partial p_\varkappa} = \frac{d}{dt}\,\frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(10)}} + \frac{d^2}{dt^2}\,\frac{\partial^2 M}{\partial p_\varkappa^{(10)}\,\partial p_\lambda^{(10)}} + \frac{d^2}{dt\,du}\,\frac{\partial^2 M}{\partial p_\varkappa^{(01)}\,\partial p_\lambda^{(10)}}$$
$$+ \frac{d}{du}\,\frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(01)}} + \frac{d^2}{dt\,du}\,\frac{\partial^2 M}{\partial p_\varkappa^{(10)}\,\partial p_\lambda^{(01)}} + \frac{d^2}{du^2}\,\frac{\partial^2 M}{\partial p_\lambda^{(01)}\,\partial p_\varkappa^{(01)}},$$

welche mit Hülfe von (39.) und den ähnlichen die weitere nothwendige Bedingung liefert

$$(47.)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda} - \frac{d}{dt}\frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(01)}} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(20)}} \\ &\qquad + \frac{d^2}{dt\,du}\frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(11)}} + \frac{d^2}{du^2}\frac{\partial N_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(02)}} = \frac{\partial N_\lambda}{\partial p_\varkappa} \end{aligned} \right.$$

für gleiche und verschiedene $\varkappa$ und λ.

Wir erhalten somit als nothwendige Bedingungen für die Existenz eines kinetischen Potentials die, dass N in den zweiten partiellen Ableitungen der p linear und dass die Beziehungen (40.), (41.), (43.), (45.), (46.), (47.) ***identisch erfüllt sein müssen.****)

Für den Beweis, dass diese Bedingungen auch die hinreichenden sind, wird es des Folgenden wegen genügen, nur *eine* abhängige Variable p vorauszusetzen, wofür dann, da $\varkappa = \lambda$ zu setzen und somit die Gleichungen (40.), (41.), (43) fortfallen, die für die in den zweiten Ableitungen lineare Function N identisch zu erfüllenden nothwendigen Bedingungen in

$$(48.)\qquad 2\frac{\partial N}{\partial p^{(10)}} - 2\frac{d}{dt}\frac{\partial N}{\partial p^{(20)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial N}{\partial p^{(11)}} = 0,$$

$$(49.)\qquad 2\frac{\partial N}{\partial p^{(01)}} - 2\frac{d}{du}\frac{\partial N}{\partial p^{(02)}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial N}{\partial p^{(11)}} = 0$$

übergehen, da die noch hinzutretende Gleichung (47.)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial N}{\partial p^{(10)}} + \frac{d}{du}\frac{\partial N}{\partial p^{(01)}} - \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial N}{\partial p^{(20)}} - \frac{d^2}{dt\,du}\frac{\partial N}{\partial p^{(11)}} - \frac{d^2}{du^2}\frac{\partial N}{\partial p^{(02)}} = 0$$

---

*) So genügen z. B. die in den zweiten Ableitungen linearen Functionen

$$N_1 = p_2^{(01)2} - 2p_2\,p_1^3\,p_2^{(10)} + 2p_1^{(11)}p_2^{(10)2} + 2p_1^{(01)}p_2^{(10)}p_2^{(20)} + 2p_2^{(10)}p_2^{(11)}p_1^{(10)},$$

$$N_2 = 2p_2\,p_1^3\,p_1^{(10)} + 2p_1^{(11)}p_2^{(10)}p_1^{(10)} + 2p_1^{(01)}p_2^{(20)}p_1^{(10)} + 2p_1^{(01)}p_2^{(10)}p_1^{(20)} - 2p_1^{(01)}p_2^{(01)} - 2p_1\,p_2^{(02)}$$

den oben angegebenen sechs Bedingungsgleichungen, und es sind in der That, wenn

$$M = p_1 p_2^{(01)2} + p_2^2\,p_1^3\,p_1^{(10)} - p_1^{(01)}\,p_2^{(10)2}\,p_1^{(10)}$$

gesetzt wird, N_1 und N_2 in der Form darstellbar

$$N_1 = \frac{\partial M}{\partial p_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial M}{\partial p_1^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial M}{\partial p_1^{(01)}}, \qquad N_2 = \frac{\partial M}{\partial p_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial M}{\partial p_2^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial M}{\partial p_2^{(01)}}.$$

aus den nach t resp. u total differentiirten identischen Gleichungen (48.) und (49.) durch Addition derselben hervorgeht.*)

Setzt man N in die Form

$$(50.)\quad \begin{cases} N = \varphi\,(t, u, p, p^{(10)}, p^{(01)})\,p^{(20)} + \psi\,(t, u, p, p^{(10)}, p^{(01)})\,p^{(11)} \\ \qquad\qquad + \chi\,(t, u, p, p^{(10)}, p^{(01)})\,p^{(02)} + \omega\,(t, u, p, p^{(10)}, p^{(01)}), \end{cases}$$

so ergeben sich aus den identisch zu befriedigenden Gleichungen (48.) und (49.) die Bedingungsgleichungen

$$(51.)\quad \frac{\partial \psi}{\partial p^{(10)}} - 2\,\frac{\partial \varphi}{\partial p^{(01)}} = 0, \qquad (52.)\quad 2\,\frac{\partial \chi}{\partial p^{(10)}} - \frac{\partial \psi}{\partial p^{(01)}} = 0,$$

$$(53.)\quad 2\,\frac{\partial \omega}{\partial p^{(10)}} - 2\,\frac{\partial \varphi}{\partial t} - 2\,\frac{\partial \varphi}{\partial p}\,p^{(10)} - \frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial p}\,p^{(01)} = 0,$$

$$(54.)\quad 2\,\frac{\partial \omega}{\partial p^{(01)}} - 2\,\frac{\partial \chi}{\partial u} - 2\,\frac{\partial \chi}{\partial p}\,p^{(01)} - \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial p}\,p^{(10)} = 0,$$

von denen, wie durch Differentiation nach $p^{(01)}$ und $p^{(10)}$ zu ersehen, das Zusammenbestehen der beiden letzten durch die beiden ersten ermöglicht ist.

Setzt man

$$(55.)\quad \begin{cases} N = \dfrac{\partial Q}{\partial p}, \quad \text{also} \\ Q = \int N\,dp = p^{(20)} \int \varphi\,dp + p^{(11)} \int \psi\,dp + p^{(02)} \int \chi\,dp + \int \omega\,dp, \end{cases}$$

so ergiebt sich innerhalb des durch die Grenzen t_0, t_1 und u_0, u_1 definirten (t, u)-Bereiches die Beziehung

$$(56.)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} N\delta p\,du\,dt = \delta \int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} Q\,du\,dt \\ \displaystyle\qquad - \int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} \Big\{ \frac{\partial Q}{\partial p^{(10)}}\,\delta p^{(10)} + \frac{\partial Q}{\partial p^{(01)}}\,\delta p^{(01)} + \frac{\partial Q}{\partial p^{(20)}}\,\delta p^{(20)} \\ \displaystyle\qquad\qquad + \frac{\partial Q}{\partial p^{(11)}}\,\delta p^{(11)} + \frac{\partial Q}{\partial p^{(02)}}\,\delta p^{(02)} \Big\}\,du\,dt, \end{cases}$$

wenn die Variationen δp, $\delta p^{(10)}$, $\delta p^{(01)}$ an den Grenzen des (t, u)-Bereiches verschwinden sollen, und es geht somit, da

---

*) Aehnlich fallen für mehrere abhängige Variable einige Bedingungsgleichungen zusammen, wie ich es in meinen „Principien der Mechanik“ für kinetische Potentiale beliebiger Ordnung von *einer* unabhängigen Variablen gezeigt habe.

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} \frac{\partial Q}{\partial p^{(20)}}\,\delta p^{(20)}\,du\,dt = -\int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} \frac{d}{dt}\,\frac{\partial Q}{\partial p^{(20)}}\,\delta p^{(10)}\,du\,dt,$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} \frac{\partial Q}{\partial p^{(02)}}\,du\,dt = -\int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} \frac{d}{du}\,\frac{\partial Q}{\partial p^{(02)}}\,\delta p^{(01)}\,du\,dt,$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} \frac{\partial Q}{\partial p^{(11)}}\,\delta p^{(11)}\,du\,dt = -\tfrac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} \frac{d}{du}\,\frac{\partial Q}{\partial p^{(11)}}\,\delta p^{(10)}\,du\,dt$$

$$-\tfrac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} \frac{d}{dt}\,\frac{\partial Q}{\partial p^{(11)}}\,\delta p^{(01)}\,du\,dt$$

ist, die Gleichung (56.), wenn

$$(57.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial p^{(10)}} - \dfrac{d}{dt}\,\dfrac{\partial Q}{\partial p^{(20)}} - \tfrac{1}{2}\,\dfrac{d}{du}\,\dfrac{dQ}{\partial p^{(11)}} = L_1, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial p^{(01)}} - \dfrac{d}{du}\,\dfrac{\partial Q}{\partial p^{(02)}} - \tfrac{1}{2}\,\dfrac{d}{dt}\,\dfrac{\partial Q}{\partial p^{(11)}} = L_2 \end{cases}$$

gesetzt wird, in

$$(58.)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} N\delta p\,du\,dt = \delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} Q\,du\,dt \\ \qquad\qquad -\displaystyle\int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} (L_1\delta p^{(10)} + L_2\delta p^{(01)})\,du\,dt \end{cases}$$

über. Bemerkt man nun, dass wegen (55.) die Gleichungen (48.) und (49.) durch Anwendung des Hülfsatzes 1. die Beziehungen

$$\frac{\partial L_1}{\partial p} = \frac{\partial^2 Q}{\partial p^{(10)}\partial p} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial^2 Q}{\partial p^{(20)}\partial p} - \tfrac{1}{2}\,\frac{d}{du}\,\frac{\partial^2 Q}{\partial p^{(11)}\partial p} = 0,$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial p} = \frac{\partial^2 Q}{\partial p^{(01)}\partial p} - \frac{d}{du}\,\frac{\partial^2 Q}{\partial p^{(02)}\partial p} - \tfrac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\frac{\partial^2 Q}{\partial p^{(11)}\partial p} = 0$$

nach sich ziehen, also L_1 und L_2 von p unabhängig sind, dass sich ferner durch Anwendung der Formeln IV, V, VI desselben Hülfsatzes aus den Gleichungen (57.)

$$\frac{\partial L_1}{\partial p^{(20)}} = \frac{\partial^2 Q}{\partial p^{(10)}\partial p^{(20)}} - \frac{\partial^2 Q}{\partial p^{(20)}\partial p^{(10)}} = 0, \qquad \frac{\partial L_2}{\partial p^{(20)}} = \frac{\partial^2 Q}{\partial p^{(01)}\partial p^{(20)}} - \tfrac{1}{2}\,\frac{\partial^2 Q}{\partial p^{(11)}\partial p^{(10)}},$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial p^{(11)}} = \tfrac{1}{2}\,\frac{\partial^2 Q}{\partial p^{(10)}\partial p^{(11)}} - \frac{\partial^2 Q}{\partial p^{(20)}\partial p^{(01)}}, \qquad \frac{\partial L_2}{\partial p^{(11)}} = \tfrac{1}{2}\,\frac{\partial^2 Q}{\partial p^{(01)}\partial p^{(11)}} - \frac{\partial^2 Q}{\partial p^{(02)}\partial p^{(10)}},$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial p^{(02)}} = \frac{\partial^2 Q}{\partial p^{(10)}\partial p^{(02)}} - \tfrac{1}{2}\,\frac{\partial^2 Q}{\partial p^{(11)}\partial p^{(01)}}, \qquad \frac{\partial L_2}{\partial p^{(02)}} = \frac{\partial^2 Q}{\partial p^{(01)}\partial p^{(02)}} - \frac{\partial^2 Q}{\partial p^{(02)}\partial p^{(01)}} = 0,$$

also

$$(59.)\quad \frac{\partial L_1}{\partial p^{(20)}} = 0, \quad \frac{\partial L_2}{\partial p^{(02)}} = 0, \quad \frac{\partial L_1}{\partial p^{(11)}} = -\frac{\partial L_2}{\partial p^{(20)}}, \quad \frac{\partial L_2}{\partial p^{(11)}} = -\frac{\partial L_1}{\partial p^{(02)}}$$

ergiebt, so folgt, wie leicht zu sehen, für L_1 und L_2 die Form

$$(60.)\quad \begin{cases} L_1 = f(t, u, p^{(10)}, p^{(01)})\, p^{(02)} - F(t, u, p^{(10)}, p^{(01)})\, p^{(11)} \\ \qquad\qquad + \Phi(t, u, p^{(10)}, p^{(01)}), \end{cases}$$

$$(61.)\quad \begin{cases} L_2 = F(t, u, p^{(10)}, p^{(01)})\, p^{(20)} - f(t, u, p^{(10)}, p^{(01)})\, p^{(11)} \\ \qquad\qquad + \Psi(t, u, p^{(10)}, p^{(01)}), \end{cases}$$

und es bleibt nur zu untersuchen, ob sich der Ausdruck

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} (L_1\, \delta p^{(10)} + L_2\, \delta p^{(01)})\, du\, dt$$

als die Variation eines Doppelintegrales einer Function von $t, u, p^{(10)}, p^{(01)}$ darstellen lässt unter der Annahme des Verschwindens der Variationen von $p^{(10)}$ und $p^{(01)}$ an den Grenzen des (t, u)-Gebietes.

Da aber allgemein, wenn A_1, B_1, A_2, B_2, C Functionen von t, u und den von diesen abhängigen Variablen p_1 und p_2 sind, und die Variationen δp_1 und δp_2 an den Grenzen des (t, u)-Gebietes verschwinden,

$$\delta \int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} (A_1 p_1^{(10)} + B_1 p_1^{(01)} + A_2 p_2^{(10)} + B_2 p_2^{(01)} + C)\, du\, dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} \Big\{ \Big(p_1^{(10)} \frac{\partial A_1}{\partial p_1} + p_1^{(01)} \frac{\partial B_1}{\partial p_1} + p_2^{(10)} \frac{\partial A_2}{\partial p_1} + p_2^{(01)} \frac{\partial B_2}{\partial p_1} + \frac{\partial C}{\partial p_1} - \frac{dA_1}{dt} - \frac{dB_1}{du} \Big) \delta p_1$$

$$+ \Big(p_1^{(10)} \frac{\partial A_1}{\partial p_2} + p_1^{(01)} \frac{\partial B_1}{\partial p_2} + p_2^{(10)} \frac{\partial A_2}{\partial p_2} + p_2^{(01)} \frac{\partial B_2}{\partial p_2} + \frac{\partial C}{\partial p_2} - \frac{dA_2}{dt} - \frac{dB_2}{du} \Big) \delta p_2 \Big\}\, du\, dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} \Big\{ \Big[\Big(\frac{\partial A_2}{\partial p_1} - \frac{\partial A_1}{\partial p_2} \Big) p_2^{(10)} + \Big(\frac{\partial B_2}{\partial p_1} - \frac{\partial B_1}{\partial p_2} \Big) p_2^{(01)} + \frac{\partial C}{\partial p_1} - \frac{\partial A_1}{\partial t} - \frac{\partial B_1}{\partial u} \Big] \delta p_1$$

$$+ \Big[\Big(\frac{\partial A_1}{\partial p_2} - \frac{\partial A_2}{\partial p_1} \Big) p_1^{(10)} + \Big(\frac{\partial B_1}{\partial p_2} - \frac{\partial B_2}{\partial p_1} \Big) p_1^{(01)} + \frac{\partial C}{\partial p_2} - \frac{\partial A_2}{\partial t} - \frac{\partial B_2}{\partial u} \Big] \delta p_2 \Big\}\, du\, dt$$

ist, so wird sich

$$(62.)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} (L_1\, \delta p^{(10)} + L_2\, \delta p^{(01)})\, du\, dt \\ \qquad = \delta \displaystyle\int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} (A_1 p^{(20)} + (B_1 + A_2) p^{(11)} + B_2 p^{(02)} + C)\, du\, dt \end{cases}$$

ergeben, wenn A_1, A_2, B_1, B_2, C so als Functionen von $t, u, p^{(10)}, p^{(01)}$ bestimmt werden können, dass

$$(63.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial A_2}{\partial p^{(10)}} - \dfrac{\partial A_1}{\partial p^{(01)}} = -F(t, u, p^{(10)}, p^{(01)}), \\ \dfrac{\partial B_2}{\partial p^{(10)}} - \dfrac{\partial B_1}{\partial p^{(01)}} = f(t, u, p^{(10)}, p^{(01)}), \end{cases}$$

$$(64.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial p^{(10)}} - \dfrac{\partial A_1}{\partial t} - \dfrac{\partial B_1}{\partial u} = \Phi(t, u, p^{(10)}, p^{(01)}), \\ \dfrac{\partial C}{\partial p^{(01)}} - \dfrac{\partial A_2}{\partial t} - \dfrac{\partial B_2}{\partial u} = \Psi(t, u, p^{(10)}, p^{(01)}) \end{cases}$$

ist. Soll nun ausserdem die Function unter dem variirten Doppelintegral die Grössen $p^{(20)}$, $p^{(02)}$, $p^{(11)}$ nicht enthalten, so muss

$$A_1 = 0, \qquad B_1 + A_2 = 0, \qquad B_2 = 0$$

sein, und es werden die zu befriedigenden Gleichungen (63.) und (64.) in

$$(65.)\qquad \frac{\partial B_1}{\partial p^{(10)}} = F(t, u, p^{(10)}, p^{(01)}), \qquad \frac{\partial B_1}{\partial p^{(01)}} = -f(t, u, p^{(10)}, p^{(01)}),$$

$$(66.)\qquad \frac{\partial C}{\partial p^{(10)}} - \frac{\partial B_1}{\partial u} = \Phi(t, u, p^{(10)}, p^{(01)}), \quad \frac{\partial C}{\partial p^{(01)}} + \frac{\partial B_1}{\partial t} = \Psi(t, u, p^{(01)}, p^{(01)})$$

übergehen. Die Bestimmung von B_1 erfordert nach den Gleichungen (65.) die Erfüllung der Bedingung

$$(67.)\qquad \frac{\partial F}{\partial p^{(01)}} + \frac{\partial f}{\partial p^{(10)}} = 0,$$

während die Bestimmung von C die Beziehung

$$(68.)\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial p^{(01)}} - \frac{\partial \Psi}{\partial p^{(10)}} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial t}$$

nach sich zieht, damit der Gleichung (62.) zufolge

$$(69.)\qquad \int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} \left(L_1\,\delta p^{(10)} + L_2\,\delta p^{(01)}\right) du\,dt = \delta \int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} C\,du\,dt$$

wird, worin C nur von t, u, $p^{(10)}$, $p^{(01)}$ abhängt.

Bemerkt man nun, dass nach (60.) und (61.)

$$\frac{\partial F}{\partial p^{(01)}} = \frac{\partial^2 L_2}{\partial p^{(20)}\,\partial p^{(01)}} = \frac{\partial^3 Q}{\partial p^{(01)}\,\partial p^{(20)}\,\partial p^{(01)}} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial^3 Q}{\partial p^{(11)}\,\partial p^{(10)}\,\partial p^{(01)}}$$

$$= \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^{(01)^2}}\,dp - \tfrac{1}{2}\int \frac{\partial^2 \psi}{\partial p^{(10)}\,\partial p^{(01)}}\,dp,$$

$$\frac{\partial f}{\partial p^{(10)}} = \frac{\partial^2 L_1}{\partial p^{(02)}\,\partial p^{(10)}} = \frac{\partial^3 Q}{\partial p^{(10)}\,\partial p^{(02)}\,\partial p^{(10)}} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial^3 Q}{\partial p^{(11)}\,\partial p^{(01)}\,\partial p^{(10)}}$$

$$= \int \frac{\partial^2 \chi}{\partial p^{(10)^2}}\,dp - \tfrac{1}{2}\int \frac{\partial^2 \psi}{\partial p^{(10)}\,\partial p^{(01)}}\,dp,$$

dass ferner aus (51.) und (52.)

$$(70.)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial p^{(01)^2}} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial p^{(10)}\partial p^{(01)}} = 0, \qquad \frac{\partial^2\chi}{\partial p^{(10)^2}} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial p^{(10)}\partial p^{(01)}} = 0$$

folgt, so werden, wenn man mit i_1, i_2, i_3, i_4 vier bestimmte Integralwerthe von

$$\int \varphi\, dp, \qquad \int \psi\, dp, \qquad \int \chi\, dp, \qquad \int \omega\, dp,$$

bezeichnet, also Q in die Form setzt

$$(71.)\qquad Q = p^{(20)}(i_1+\varphi_1) + p^{(11)}(i_2+\psi_1) + p^{(02)}(i_3+\chi_1) + (i_4+\omega_1),$$

worin φ_1, ψ_1, χ_1, ω_1 willkürliche Functionen von t, u, $p^{(10)}$, $p^{(01)}$ sind, diese Functionen der Bedingung unterworfen werden können

$$(72.)\qquad \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial p^{(01)^2}} - \frac{\partial^2\chi_1}{\partial p^{(10)^2}} = \frac{\partial^2 i_1}{\partial p^{(01)^2}} - \frac{\partial^2 i_3}{\partial p^{(10)^2}},$$

da die rechte Seite dieser Gleichung vermöge (70.) eine von p freie, fest bestimmte Function von t, u, $p^{(10)}p^{(01)}$ ist, und der so aus (71.) für Q sich ergebende Werth wird somit der Gleichung (67.) Genüge leisten.

Es ist ferner aus (57.) leicht ersichtlich, dass

$$\Phi = (L_1)_{p^{(02)}=p^{(11)}=0} = \frac{\partial Q}{\partial p^{(10)}} - \frac{\partial^2 Q}{\partial p^{(20)}\partial t} - \frac{\partial^2 Q}{\partial p^{(20)}\partial p}\,p^{(10)}$$
$$- \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 Q}{\partial p^{(11)}\partial u} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 Q}{\partial p^{(11)}\partial p}\,p^{(01)},$$

$$\Psi = (L_2)_{p^{(20)}=p^{(11)}=0} = \frac{\partial Q}{\partial p^{(01)}} - \frac{\partial^2 Q}{\partial p^{(02)}\partial u} - \frac{\partial^2 Q}{\partial p^{(02)}\partial p}\,p^{(01)}$$
$$- \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 Q}{\partial p^{(11)}\partial t} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 Q}{\partial p^{(11)}\partial p}\,p^{(10)},$$

also

$$\frac{\partial\Phi}{\partial p^{(01)}} - \frac{\partial\Psi}{\partial p^{(10)}} = -\frac{\partial^3 Q}{\partial p^{(20)}\partial t\,\partial p^{(01)}} - \frac{\partial^3 Q}{\partial p^{(20)}\partial p\,\partial p^{(01)}}\,p^{(10)} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial^3 Q}{\partial p^{(11)}\partial u\partial p^{(01)}}$$
$$- \tfrac{1}{2}\frac{\partial^3 Q}{\partial p^{(11)}\partial p\,\partial p^{(01)}}\,p^{(01)} + \frac{\partial^3 Q}{\partial p^{(02)}\partial u\partial p^{(10)}} + \frac{\partial^3 Q}{\partial p^{(02)}\partial p\,\partial p^{(10)}}p^{(01)}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\frac{\partial^3 Q}{\partial p^{(11)}\partial t\,\partial p^{(10)}} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^3 Q}{\partial p^{(11)}\partial p\,\partial p^{(10)}}\,p^{(10)};$$

ferner ist

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial^2 L_1}{\partial p^{(02)}\partial u} = \frac{\partial^3 Q}{\partial p^{(10)}\partial p^{(02)}\partial u} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial^3 Q}{\partial p^{(11)}\partial p^{(01)}\partial u},$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 L_2}{\partial p^{(20)}\partial t} = \frac{\partial^3 Q}{\partial p^{(01)}\partial p^{(20)}\partial t} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial^3 Q}{\partial p^{(11)}\partial p^{(10)}\partial t},$$

und somit

$$\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^3 Q}{\partial p^{(10)} \partial p^{(02)} \partial u} - \frac{\partial^3 Q}{\partial p^{(01)} \partial p^{(20)} \partial t} - \tfrac{1}{2} \frac{\partial^3 Q}{\partial p^{(11)} \partial p^{(01)} \partial u} + \tfrac{1}{2} \frac{\partial^3 Q}{\partial p^{(11)} \partial p^{(10)} \partial t},$$

so dass sich noch ohne jede Beschränkung der Integrale in Q die Beziehung ergiebt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p^{(01)}} - \frac{\partial \Psi}{\partial p^{(10)}} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial t} + p^{(10)} \frac{\partial}{\partial p} \left\{ \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial p^{(11)} \partial p^{(10)}} - \frac{\partial^2 Q}{\partial p^{(20)} \partial p^{(01)}} \right\} - p^{(01)} \frac{\partial}{\partial p} \left\{ \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial p^{(11)} \partial p^{(01)}} - \frac{\partial^2 Q}{\partial p^{(02)} \partial p^{(10)}} \right\}.$$

Da aber

$$\tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial p^{(11)} \partial p^{(10)}} - \frac{\partial^2 Q}{\partial p^{(20)} \partial p^{(01)}} = \tfrac{1}{2} \int \frac{\partial \psi}{\partial p^{(10)}} dp - \int \frac{\partial \varphi}{\partial p^{(01)}} dp,$$

$$\tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial p^{(11)} \partial p^{(01)}} - \frac{\partial^2 Q}{\partial p^{(02)} \partial p^{(10)}} = \tfrac{1}{2} \int \frac{\partial \psi}{\partial p^{(01)}} dp - \int \frac{\partial \chi}{\partial p^{(10)}} dp$$

ist, so werden wieder vermöge der Gleichungen (51.) und (52.), damit die Bedingung (68.) erfüllt wird, die willkürlichen Functionen φ_1, ψ_1, χ_1 nur so zu bestimmen sein, dass die beiden Gleichungen erfüllt werden:

$$(73.) \quad \tfrac{1}{2} \frac{\partial \psi_1}{\partial p^{(10)}} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial p^{(01)}} = F_2, \qquad (74.) \quad \tfrac{1}{2} \frac{\partial \psi_1}{\partial p^{(01)}} - \frac{\partial \chi_1}{\partial p^{(10)}} = F_3,$$

worin F_2 und F_3 durch die Wahl von i_1, i_2, i_3 fest bestimmte Functionen von t, u, $p^{(10)}$, $p^{(01)}$ sind.

Werden somit die drei Functionen φ_1, ψ_1, χ_1 von t, u, $p^{(10)}$, $p^{(01)}$ so bestimmt, dass sie den drei partiellen Differentialgleichungen (72.), (73.), (74.) Genüge leisten, so wird der hierdurch bestimmte Werth von Q so beschaffen sein, dass die Gleichung (69.) besteht, in welcher C nur von t, u, $p^{(10)}$, $p^{(01)}$ abhängt, und somit (58.) in

$$(75.) \quad \int_{t_0}^{t_1} \int_{u_0}^{u_1} N \delta p \, du \, dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \int_{u_0}^{u_1} (Q - C) \, du \, dt$$

übergeht, worin die Coefficienten von $p^{(20)}$, $p^{(11)}$, $p^{(02)}$ in dem Ausdruck $Q - C$ dieselben sind, als in Q.

Da nun die Gleichungen (23.) bis (27.) des Hülfsatzes 3., wenn

$$x = t, \quad y = u, \quad z = p, \quad p = p^{(10)}, \quad q = p^{(01)}, \quad \omega = 0, \quad \omega_1 = \Omega,$$

gesetzt wird in

$$(76.)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial p^{(01)^2}}+\frac{\partial^2\chi}{\partial p^{(10)^2}}+\frac{\partial^2\psi}{\partial p^{(10)}\,\partial p^{(01)}}=0,$$

$$(77.)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{\partial^2\Omega}{\partial p^{(10)^2}}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^{(01)}\,\partial u}+p^{(01)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^{(01)}\,\partial p}-\frac{\partial^2\psi}{\partial p^{(10)}\,\partial u}\\&\qquad -p^{(01)}\frac{\partial^2\psi}{\partial p^{(10)}\,\partial p}-2\frac{\partial\varphi}{\partial p}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^{(10)}\,\partial t}-p^{(10)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^{(10)}\,\partial p}=0,\end{aligned}\right.$$

$$(78.)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^{(01)}\,\partial t}+p^{(10)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^{(01)}\,\partial p}+\frac{\partial^2\chi}{\partial u\,\partial p^{(10)}}+p^{(01)}\frac{\partial^2\chi}{\partial p\,\partial p^{(01)}}\\&\qquad +\frac{\partial\psi}{\partial p}-\frac{\partial^2\Omega}{\partial p^{(10)}\,\partial p^{(01)}}=0,\end{aligned}\right.$$

$$(79.)\qquad \left\{\begin{aligned}&-\frac{\partial^2\chi}{\partial p^{(10)}\,\partial t}-p^{(10)}\frac{\partial^2\chi}{\partial p^{(10)}\,\partial p}-\frac{\partial^2\Omega}{\partial p^{(01)^2}}+2\frac{\partial\chi}{\partial p}+\frac{\partial^2\chi}{\partial p^{(01)}\,\partial u}\\&\qquad +p^{(01)}\frac{\partial^2\chi}{\partial p^{(01)}\,\partial p}+\frac{\partial^2\psi}{\partial t\,\partial p^{(01)}}+p^{(10)}\frac{\partial^2\psi}{\partial p\,\partial p^{(01)}}=0,\end{aligned}\right.$$

$$(80.)\qquad \left\{\begin{aligned}&-\frac{\partial^2\Omega}{\partial p^{(10)}\,\partial t}-p^{(10)}\frac{\partial^2\Omega}{\partial p^{(10)}\,\partial p}-\frac{\partial^2\Omega}{\partial p^{(01)}\,\partial u}-p^{(01)}\frac{\partial^2\Omega}{\partial p^{(01)}\,\partial p}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\\&\qquad +2p^{(10)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial p}+p^{(10)^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}+\frac{\partial^2\chi}{\partial u^2}+2p^{(01)}\frac{\partial^2\chi}{\partial u\,\partial p}\\&+p^{(01)^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial p^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial t\,\partial u}+p^{(01)}\frac{\partial^2\psi}{\partial t\,\partial p}+p^{(10)}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial p}\\&\qquad +p^{(10)}p^{(01)}\frac{\partial^2\psi}{\partial p^2}+\frac{\partial\Omega}{\partial p}=0,\end{aligned}\right.$$

übergehen, so wird sich leicht zeigen lassen, dass eine Function

$$(81.)\qquad K=p^{(20)}\varphi+p^{(11)}\psi+p^{(02)}\chi+\Omega,$$

in welcher φ, ψ, χ die in den Ausdruck (50.) für N vorkommenden Functionen bedeuten, gebildet werden kann von der Art, dass die Variation

$$(82.)\qquad \delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} K\,du\,dt=0$$

identisch befriedigt wird, wenn die Variationen δp, $\delta p^{(10)}$, $\delta p^{(01)}$ an den Grenzen des (t, u)-Gebietes verschwinden. Denn zunächst ist aus den Gleichungen (51.) und (52.) durch partielle Differentiation nach $p^{(10)}$ und $p^{(01)}$ und Addition ersichtlich, dass die Gleichung (76.) befriedigt wird, während die Gleichungen (77.), (78.), (79.) vermöge eben dieser Beziehungen in

$$(83.)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial p^{(10)2}} = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial p^{(01)}\partial u} + p^{(01)}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial p^{(01)}\partial p} + 2\dfrac{\partial\varphi}{\partial p} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial p^{(10)}\partial t} \\ \qquad\qquad + p^{(10)}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial p^{(10)}\partial p}, \end{array}\right.$$

$$(84.)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial p^{(10)}\partial p^{(01)}} = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial p^{(01)}\partial t} + p^{(10)}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial p^{(01)}\partial p} + \dfrac{\partial^2\chi}{\partial u\partial p^{(10)}} \\ \qquad\qquad + p^{(01)}\dfrac{\partial^2\chi}{\partial p\,\partial p^{(10)}} + \dfrac{\partial\psi}{\partial p}, \end{array}\right.$$

$$(85.)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial p^{(01)2}} = \dfrac{\partial^2\chi}{\partial p^{(10)}\partial t} + p^{(10)}\dfrac{\partial^2\chi}{\partial p^{(10)}\partial p} + 2\dfrac{\partial\chi}{\partial p} + \dfrac{\partial^2\chi}{\partial p^{(01)}\partial u} \\ \qquad\qquad + p^{(01)}\dfrac{\partial^2\chi}{\partial p^{(01)}\partial p}, \end{array}\right.$$

übergehen, und (80.) die Form annimmt

$$(86.)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial p^{(10)}\partial t} + p^{(10)}\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial p^{(10)}\partial p} + \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial p^{(01)}\partial u} + p^{(01)}\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial p^{(01)}\partial p} - \dfrac{\partial\Omega}{\partial p} \\ = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + 2p^{(10)}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial p} + p^{(10)2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + \dfrac{\partial^2\chi}{\partial u^2} + 2p^{(01)}\dfrac{\partial^2\chi}{\partial u\,\partial p} + p^{(01)2}\dfrac{\partial^2\chi}{\partial p^2} \\ \qquad + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial t\,\partial u} + p^{(01)}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t\,\partial p} + p^{(10)}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial p} + p^{(10)}p^{(01)}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial p^2}. \end{array}\right.$$

Setzt man die Gleichungen (83.), (84.), (85.) zur Abkürzung in die Form

$$(87.)\qquad \frac{\partial^2\Omega}{\partial p^{(10)2}} = X, \qquad \frac{\partial^2\Omega}{\partial p^{(10)}\partial p^{(01)}} = Y, \qquad \frac{\partial^2\Omega}{\partial p^{(01)2}} = Z,$$

so ergiebt sich leicht mit Hülfe der Gleichungen (51.) und (52.)

$$\frac{\partial X}{\partial p^{(01)}} = \frac{\partial Y}{\partial p^{(10)}}, \qquad \frac{\partial Y}{\partial p^{(01)}} = \frac{\partial Z}{\partial p^{(10)}},$$

und bestimmt man daraus zwei Functionen

$$\Omega_1(t, u, p, p^{(10)}, p^{(01)}), \qquad \Omega_2(t, u, p, p^{(10)}, p^{(01)}),$$

welche den Gleichungen

$$d\Omega_1 = X\,dp^{(10)} + Y\,dp^{(01)}, \qquad d\Omega_2 = Y\,dp^{(10)} + Z\,dp^{(01)}$$

genügen, deren allgemeine Lösungen also durch

$$\Omega_1 + \omega_1(t, u, p) \quad \text{und} \quad \Omega_2 + \omega_2(t, u, p)$$

dargestellt sind, worin ω_1 und ω_2 willkürliche Functionen bedeuten, so wird, da

$$\frac{\partial\Omega_1}{\partial p^{(01)}} = \frac{\partial\Omega_2}{\partial p^{(10)}}$$

ist, wenn $\overline{\Omega}$ eine der Differentialgleichung

$$d\Omega = \Omega_1\, dp^{(10)} + \Omega_2\, dp^{(01)}$$

genügende Function bedeutet, die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen (87.) durch

$$\Omega = \overline{\Omega} + \omega_1(t, u, p)\, p^{(10)} + \omega_2(t, u, p)\, p^{(01)} + \omega_3(t, u, p)$$

dargestellt sein, worin auch ω_3 eine willkürliche Function ihrer Argumente bedeutet.

Setzt man nun diesen Werth von Ω in die noch zu befriedigende Gleichung (86.) ein, so geht diese in

$$(88.)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2\overline{\Omega}}{\partial p^{(10)}\partial t} + \frac{\partial\omega_1}{\partial t} + p^{(10)}\frac{\partial^2\overline{\Omega}}{\partial p^{(10)}\partial p} + \frac{\partial^2\overline{\Omega}}{\partial p^{(10)}\partial u} + \frac{\partial\omega_2}{\partial u} \\ &\qquad + p^{(01)}\frac{\partial^2\overline{\Omega}}{\partial p^{(01)}\partial p} - \frac{\partial\overline{\Omega}}{\partial p} - \frac{\partial\omega_3}{\partial p} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial p}p^{(10)} \\ &+ p^{(10)^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2\chi}{\partial u^2} + 2p^{(01)}\frac{\partial^2\chi}{\partial u\,\partial p} + p^{(01)^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial t\,\partial u} \\ &\qquad + p^{(01)}\frac{\partial^2\psi}{\partial t\,\partial p} + p^{(01)}\frac{\partial^2\psi}{\partial t\,\partial p} + p^{(10)}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial p} + p^{(10)}p^{(01)}\frac{\partial^2\psi}{\partial p^2} \end{aligned}\right.$$

über, und es bleibt somit nur noch zu entscheiden, ob durch eine passende Wahl der willkürlichen Functionen $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, die jedoch nur von t, u und p abhängen, diese Gleichung identisch befriedigt werden kann. Differentiirt man aber dieselbe nach $p^{(10)}$ und $p^{(01)}$, so sieht man durch eine einfache Rechnung, da

$$\frac{\partial^2\overline{\Omega}}{\partial p^{(10)^2}} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial p^{(10)^2}}, \qquad \frac{\partial^2\overline{\Omega}}{\partial p^{(10)}\partial p^{(01)}} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial p^{(10)}\partial p^{(01)}}, \qquad \frac{\partial^2\overline{\Omega}}{\partial p^{(01)^2}} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial p^{(01)^2}},$$

ist, durch Einsetzen der durch die Gleichungen (83.), (84.), (85.) gegebenen Werthe dieser zweiten partiellen Differentialquotienten und mit Benutzung der Gleichungen (51.) und (52.), dass das Resultat der Differentiation identisch Null ist, die Gleichung (88.) somit $p^{(10)}$ und $p^{(01)}$ garnicht enthält und somit in eine Beziehung von der Form

$$(89.)\qquad F\left(t, u, p, \frac{\partial\omega_1}{\partial t}, \frac{\partial\omega_2}{\partial u}, \frac{\partial\omega_3}{\partial p}\right) = 0$$

übergeht, die somit immer befriedigt werden kann.

Nachdem somit die Existenz einer Function K von der Form (81.) festgestellt worden, welche der Gleichung (82.) identisch Genüge leistet,

wird die Zusammenstellung dieser letzteren Gleichung mit der Gleichung (75.) die Beziehung liefern

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} N\,\delta p\,du\,dt = \delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} (Q-C-K)\,du\,dt$$

oder wenn

$$Q-C-K=M$$

gesetzt wird, worin, da die Grössen $p^{(20)}$, $p^{(11)}$, $p^{(02)}$ aus der Differenz $Q-K$ herausfallen, M nur von t, u, p, $p^{(10)}$, $p^{(01)}$ abhängt, unter der Voraussetzung des Verschwindens der Variationen δp, $\delta p^{(10)}$, $\delta p^{(01)}$ an den Grenzen des (t, u)-Gebietes

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} N\delta p\,du\,dt = \delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} M\,du\,dt,$$

woraus sich unmittelbar die Relation ergiebt

$$N=\frac{\partial M}{\partial p}-\frac{d}{dt}\frac{\partial M}{\partial p^{(10)}}-\frac{d}{du}\frac{\partial M}{\partial p^{(01)}}.$$

Wir finden somit *als nothwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz eines kinetischen Potentials einer von* $t, u, p, p^{(10)}, p^{(01)}, p^{(20)}, p^{(11)}, p^{(02)}$ *abhängigen Function* N *oder dafür, dass eine Function* M *von* $t, u, p^{(10)}, p^{(01)}$ *existirt, durch welche sich* N *in der Form darstellen lässt*

$$N=\frac{\partial M}{\partial p}-\frac{d}{dt}\frac{\partial M}{\partial p^{(10)}}-\frac{d}{du}\frac{\partial M}{\partial p^{(01)}}, \tag{90.}$$

die, dass N *in den Grössen* $p^{(20)}$, $p^{(11)}$, $p^{(02)}$ *linear ist und den beiden Gleichungen*

$$\begin{cases} 2\dfrac{\partial N}{\partial p^{(10)}}-2\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial N}{\partial p^{(20)}}-\dfrac{d}{du}\dfrac{\partial N}{\partial p^{(11)}}=0, \\ 2\dfrac{\partial N}{\partial p^{(01)}}-2\dfrac{d}{du}\dfrac{\partial N}{\partial p^{(02)}}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial N}{\partial p^{(11)}}=0 \end{cases} \tag{91.}$$

identisch Genüge leistet.

Man sieht aber sogleich, dass es unendlich viele solcher Functionen M giebt, da, wenn M_1 irgend eine Function von t, u, p, $p^{(10)}$, $p^{(01)}$ ist, welche in der Form

$$M_1=\frac{d\omega_1(t,u,p,p^{(10)},p^{(01)})}{dt}+\frac{d\omega_2(t,u,p,p^{(10)},p^{(01)})}{du}+F(t,u) \tag{92.}$$

darstellbar ist, worin ω_1, ω_2, F beliebige Functionen der eingeschlossenen

Grössen bedeuten, die Function M_1 nach dem Hülfsatze 3. der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial M_1}{\partial p} - \frac{d}{dt}\frac{\partial M_1}{\partial p^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial M_1}{\partial p^{(01)}} = 0 \tag{93.}$$

identisch Genüge leistet, und somit aus (90.) und (92.), wenn

$$M - M_1 = L$$

gesetzt wird,

$$N = \frac{\partial L}{\partial p} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial L}{\partial p^{(01)}}$$

folgt. Damit sind aber auch alle Functionen M ermittelt, welche die Gleichung (90.) befriedigen, da, wenn M_2 irgend eine solche von M verschiedene bedeutet, aus (90.) und der zu M_2 gehörigen sich durch Subtraction die identische Gleichung

$$\frac{\partial (M - M_2)}{\partial p} - \frac{d}{dt}\frac{\partial (M - M_2)}{\partial p^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial (M - M_2)}{\partial p^{(01)}} = 0$$

ergeben würde, welche wiederum nach dem Hülfsatz 3. verlangt, dass $M - M_2$ in der oben für M_1 angenommenen Form (92.) sich darstellen lässt; es folgt somit,

dass, wenn N eine in den Grössen $p^{(20)}$, $p^{(11)}$, $p^{(02)}$ *lineare Function ist, welche den Gleichungen* (91.) *identisch Genüge leistet, unendlich viele Auflösungen M der Gleichung* (90.) *genügen, die sich aber sämmtlich, von Functionen der unabhängigen Variabeln t und u abgesehen, nur um nach t und u genommene Differentialquotienten beliebiger Functionen von t, u, p,* $p^{(10)}$, $p^{(01)}$ *unterscheiden.*

Das hier angewandte Princip zum Beweise der Existenz des kinetischen Potentials erster Ordnung und *einer* abhängigen Variabeln reicht aus, um für kinetische Potentiale höherer Ordnung mit beliebig vielen abhängigen Variabeln die ähnlich wie oben in den Gleichungen (47.) aufgestellten nothwendigen Bedingungen auch als die hinreichenden zu erkennen.

Nach Aufstellung dieser vier Hülfsätze wende ich mich nunmehr zur Erweiterung der als Principien der Mechanik bekannten mathematischen Sätze auf mehrere unabhängige Variable, deren Bedeutung im Folgenden genauer festgestellt werden soll.

§ 2.

Das erweiterte *Hamilton*sche Princip, und die erste und zweite Form der erweiterten *Lagrange*schen Gleichungen.

Seien t und u von einander unabhängige, $x_1, x_2, \ldots x_n$ von diesen abhängige Grössen, und nehmen wir an, dass die Veränderungen dieser Grössen, die selbst noch gewissen Beschränkungen unterworfen sein können, derart vor sich gehen, dass, wenn H eine bestimmte von t, u, x_i, $x_i^{(10)}$, $x_i^{(01)}$ abhängige Function bedeutet, die wir ***das kinetische Potential****) nennen wollen,

$$(1.) \qquad \delta \int_{t_0}^{t_1} \int_{u_0}^{u_1} (H - \sum_1^n{}_i X_i x_i)\, du\, dt = 0$$

ist, worin durch die Grenzen ein gewisses (t, u)-Gebiet definirt ist, und die Variationen der $x_1, x_2, \ldots, x_n$ an den Grenzen dieses Gebietes verschwinden sollen, während die X_s gegebene Functionen von t und u ausdrücken mögen, deren Bedeutung nachher festgestellt wird, so werden die Gleichungen, denen die Veränderungen der $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als Functionen von t und u unterworfen sind, durch

$$(2.) \qquad \sum_1^n{}_i \left\{ \frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial x_i^{(10)}} - \frac{d}{du} \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_i^{(01)}} - X_i \right\} \delta x_i = 0$$

gegeben sein, worin die Variationen $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$ durch die in den virtuellen Veränderungen linearen Bedingungsgleichungen

$$(3.) \qquad \sum_1^n{}_i f_{1i}\, \delta x_i = 0, \quad \sum_1^n{}_i f_{2i}\, \delta x_i = 0, \ \ldots \ \sum_1^n{}_i f_{mi}\, \delta x_i = 0$$

mit einander verbunden sein sollen, in denen die Functionen f_{xi} von $t, u, x_1, x_2, \ldots, x_n$, aber nicht von den partiellen Ableitungen dieser Grössen abhängen, und deren Integrabilität oder Nicht-Integrabilität die ***holonomen*** oder ***nicht holonomen*** Systeme charakterisirt; ***die Gleichung*** (2.) ***stellt das verallgemeinerte d'Alembertsche Princip dar.***

---

*) Die Annahme von nur zwei unabhängigen Variabeln soll lediglich der Kürze der Darstellung halber gemacht werden, und die Beschränkung des kinetischen Potentials, nur partielle Ableitungen *erster* Ordnung zu enthalten, also ein kinetisches Potential erster Ordnung zu sein, wird durch genau dieselben Betrachtungen aufgehoben und die Untersuchung auf solche beliebig hoher Ordnung erweitert werden, wie sie für kinetische Potentiale, welche nur von *einer* unabhängigen Variabeln abhängen, in meinem Buche „die Principien der Mechanik“ durchgeführt wurden. Fasst man $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als physikalische Grössen auf, so wird man sich z. B. unter den unabhängigen Variabeln die Zeit und die von diesen unabhängigen Raumgrössen zu denken haben.

Durch Multiplication der Gleichungen (2.) mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ erhalten wir die ***erste Lagrangesche Form der Veränderungsgleichungen***

$$(4.)\quad \frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x_i^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial x_i^{(01)}} = X_i + \lambda_1 f_{1i} + \lambda_2 f_{2i} + \cdots + \lambda_m f_{mi} \quad (i = 1, 2 \ldots n),$$

also n partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung in den Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, die in Bezug auf die zweiten Differentialquotienten linear sind.

Ist das System ein holonomes, sind also die Bedingungsgleichungen in der Form

$$(5.)\quad \begin{cases} F_1(t, u, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad F_2(t, u, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \qquad\qquad \ldots F_m(t, u, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

gegeben, so erhält man in (4.) und (5.) $n+m$ Gleichungen zur Bestimmung der $n+m$ Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ als Functionen von t und u, wobei für $t = 0$ im allgemeinen die Werthe von $n-m$ der Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und deren nach t genommenen partiellen Differentialquotienten als willkürliche Functionen von u in der Form

$$(x_i)_{t=0} = \varphi_i(u), \left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)_{t=0} = \psi_i(u)$$

gegeben werden können.

Ist dagegen das System nicht holonom, und enthalten die Functionen f_{xi} die unabhängigen Variabeln t und u nicht explicite, so werden aus bekannten Gründen die Beziehungen gelten

$$(6.)\quad \sum_1^n{}_i f_{1i} x_i^{(10)} = 0, \ldots, \sum_1^n{}_i f_{mi} x_i^{(10)} = 0, \sum_1^n{}_i f_{1i} x_i^{(01)}, \ldots, \sum_1^n{}_i f_{mi} x_i^{(01)} = 0,$$

und somit durch (4.) und (6.) $n+2m$ partielle Differentialgleichungen zur Bestimmung der $n+m$ Grössen $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ gegeben sein, sodass Bedingungen für das Zusammenbestehen der Gleichungen oder für die Auflösbarkeit des Problems erfüllt sein müssen; für den Fall aber, dass das nicht holonome System in den Coefficienten seiner Bedingungsgleichungen die Grössen t und u explicite enthält, muss die Behandlung des Problems in jedem einzelnen Falle den Bedingungen der Aufgabe angepasst werden.

Nehmen wir weiter an, dass die Bedingungsgleichungen (5.) auch die partiellen Ableitungen erster Ordnung der x_i nach t und u genommen enthalten, dass diese also lauten

$$(7.)\quad F_1(t, u, x_i, x_i^{(10)}, x_i^{(01)}) = 0, \ldots, F_m(t, u, x_i, x_i^{(10)}, x_i^{(01)}) = 0,$$

in welchem Falle das System auch noch holonom genannt werden soll, so werden die Variationen der x_i und deren Ableitungen den m Bedingungsgleichungen unterworfen sein

$$\sum_1^n{}_i \left(\frac{\partial F_r}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial F_r}{\partial x_i^{(10)}} \delta x_i^{(10)} + \frac{\partial F_r}{\partial x_i^{(01)}} \delta x_i^{(01)} \right) = 0 \qquad (r = 1, 2 \ldots, m),$$

aus denen, da diese Beziehungen für den gesammten Verlauf der Veränderungen in dem für das oben erweiterte *Hamilton*sche Princip angenommenen Grössengebiet der t und u erfüllt sein sollen, unter der für dieses Princip gemachten Annahme, dass die Variationen der x_i an den Grenzen dieses Gebietes verschwinden, sich

$$\sum_1^n{}_i \int_{t_0}^{t_1} \int_{u_0}^{u_1} \left(\frac{\partial F_r}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F_r}{\partial x_i^{(10)}} - \frac{d}{du} \frac{\partial F_r}{\partial x_i^{(01)}} \right) \delta x_i \, du \, dt = 0 \qquad (r = 1, 2 \ldots, m)$$

ergiebt. Es werden somit für die Variationen der Grössen x_i selbst die in diesen linearen homogenen Gleichungen

$$(8.) \qquad \sum_1^n{}_i \left(\frac{\partial F_r}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F_r}{\partial x_i^{(10)}} - \frac{d}{du} \frac{\partial F_r}{\partial x_i^{(01)}} \right) \delta x_i = 0 \qquad (r = 1, 2 \ldots, m)$$

bestehen, und wenn man dieselben mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ multiplicirt und zu (2.) addirt, sich die n partiellen Differentialgleichungen ergeben

$$(9.) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x_i} - \dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial H}{\partial x_i^{(10)}} - \dfrac{d}{du} \dfrac{\partial H}{\partial x_i^{(01)}} = X_i \\ \qquad + \sum\limits_1^m{}_r \lambda_r \left(\dfrac{\partial F_r}{\partial x_i} - \dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial F_r}{\partial x_i^{(10)}} - \dfrac{d}{du} \dfrac{\partial F_r}{\partial x_i^{(01)}} \right) \qquad (i = 1, 2 \ldots, n), \end{cases}$$

welche mit den Gleichungen (7.) ein simultanes System von $n+m$ partiellen Differentialgleichungen in den $n+m$ Grössen x_i und λ_r bilden.

Ist jedoch das System der auch die Ableitungen der x_i enthaltenden Bedingungsgleichungen ein nicht holonomes, haben diese also die Form

$$(10.) \quad \begin{cases} \sum\limits_1^n{}_i \left(f_{1i} \delta x_i + \varphi_{1i} \delta x_i^{(10)} + \psi_{1i} \delta x_i^{(01)} \right) = 0, \\ \cdots \sum\limits_1^n{}_i \left(f_{mi} \delta x_i + \varphi_{mi} \delta x_i^{(10)} + \psi_{mi} \delta x_i^{(01)} \right) = 0, \end{cases}$$

worin die Coefficienten der Variationen Functionen von t, u, x_i, $x_i^{(10)}$, $x_i^{(01)}$ sind, so wird sich zunächst genau wie vorher das System von Differentialgleichungen ergeben

$$(11.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x_i} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial H}{\partial x_i^{(10)}} - \dfrac{d}{du}\dfrac{\partial H}{\partial x_i^{(01)}} = X_i \\ \qquad + \sum_1^m{}_r \lambda_r \left(f_{ri} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \varphi_{ri}}{\partial x_i^{(10)}} - \dfrac{d}{du}\dfrac{\partial \psi_{ri}}{\partial x_i^{(01)}} \right) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

enthalten nun die Bedingungsgleichungen (10.) t und u nicht explicite, so liefern diese $2m$ partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$(12.)\quad \begin{cases} \sum_1^n{}_i \left(f_{ri}\, x_i^{(10)} + \varphi_{ri}\, x_i^{(20)} + \psi_{ri}\, x_i^{(11)} \right) = 0, \\ \sum_1^n{}_i \left(f_{ri}\, x_i^{(01)} + \varphi_{ri}\, x_i^{(11)} + \psi_{ri}\, x_i^{(02)} \right) = 0, \end{cases} \quad (r = 1, 2 \ldots m),$$

welche mit den n partiellen Differentialgleichungen (11.) zusammen wiederum $n + 2m$ Differentialgleichungen zur Bestimmung der $n + m$ Grössen x_i und λ_r bilden, so dass im allgemeinen wieder Bedingungen für das Zusammenbestehen der Differentialgleichungen oder für die Auflösbarkeit des Problems erfüllt sein müssen. Für den Fall jedoch, dass die Gleichungen (10.) nicht von t und u frei sind, müssen die Methoden zur Behandlung des Problems den Bedingungen der Aufgabe angepasst werden.

In einem vorgelegten Probleme wird im allgemeinen eine Veränderung einer der Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eine Veränderung der anderen hervorbringen, und wir wollen die Ursachen dieser Veränderungen die inneren Kräfte nennen; heben wir nun diese Ursachen auf oder lassen wir die inneren Kräfte verschwinden, so mag der hieraus resultirende Werth von H mit $-T$ bezeichnet werden, sodass sich aus Gleichung (2.)

$$\sum_1^n{}_i \left(-\frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x_i^{(10)}} + \frac{d}{du}\frac{\partial T}{\partial x_i^{(01)}} - X_i \right) \delta x_i = 0$$

ergiebt, und wenn man die Zwangsbedingungen aufhebt, die Variationen δx_i also von einander unabhängig sind,

$$(13.)\qquad -\frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x_i^{(10)}} + \frac{d}{du}\frac{\partial T}{\partial x_i^{(01)}} = X_i$$

als Veränderungsgleichungen des freien Systems aufgefasst werden können; wir wollen ferner die Veränderungen der x_i, welche durch die Differentialgleichungen

$$(14.)\qquad -\frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x_i^{(10)}} + \frac{d}{du}\frac{\partial T}{\partial x_i^{(01)}} = 0$$

definirt werden, als die durch die Anfangszustände hervorgerufenen bezeichnen, während die wirklich stattfindenden Veränderungen des freien Systems durch die Gleichung (13.) definirt werden, und X_i als Ursache der Veränderungen jetzt äussere Kräfte genannt werden sollen, wobei

$$-\frac{\partial T}{\partial x_i}+\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x_i^{(10)}}+\frac{d}{du}\frac{\partial T}{\partial x_i^{(01)}}$$

das Maass der Kraft ist.*)

Lässt sich das kinetische Potential in zwei additiv verbundene Theile zerlegen, von denen der eine $-T$ ist, der andere mit $-U$ bezeichnet werden mag, dann soll in Analogie zur Mechanik T die *actuelle*, $-U$ die *potentielle Energie* genannt werden; wir werden dann sagen, die inneren Kräfte besitzen eine Kräftefunction U und

$$V_i=\frac{\partial U}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial x_i^{(10)}}-\frac{d}{du}\frac{\partial U}{\partial x_i^{(01)}}$$

ist die auf x_i wirkende *innere* Kraft.

Nach dem oben bewiesenen Hülfsatz 4. wird die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer Kräftefunction oder eines kinetischen Potentials dadurch ausgedrückt sein, dass V_i in den zweiten partiellen Differentialquotienten linear ist und den sechs Bedingungsgleichungen

---

*) Wenn das kinetische Potential höhere partielle Ableitungen als die ersten enthält, wird das Maass der Kraft durch

$$(\alpha)\quad\left\{\begin{aligned}&-\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x^{(10)}}+\frac{d}{du}\frac{\partial T}{\partial x^{(01)}}-\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial T}{\partial x^{(20)}}\\&\qquad-\frac{d^2}{dt\,du}\frac{\partial T}{\partial x^{(11)}}-\frac{d^2}{du^2}\frac{\partial T}{\partial x^{(02)}}+\cdots\end{aligned}\right.$$

dargestellt, während das erweiterte *d'Alembert*sche Princip die Form annimmt

$$\sum_1^n{}_i\Big(\frac{\partial H}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x_i^{(10)}}-\frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial x_i^{(01)}}+\frac{d^2}{\partial t^2}\frac{\partial H}{\partial x_i^{(20)}}\\ \frac{d^2}{dt\,du}\frac{\partial H}{\partial x_i^{(11)}}+\frac{d^2}{du^2}\frac{\partial H}{\partial x_i^{(02)}}-\cdots-X_i\Big)\delta x_i=0.$$

Für den Beweis, dass der Ausdruck (α) der unter der Annahme der Gültigkeit des erweiterten *Hamilton*schen Princips allein mögliche Ausdruck für das Maass der Kraft ist, verweise ich auf § 2. meiner „Principien der Mechanik“.

$$\frac{\partial V_\varkappa}{\partial x_\lambda^{(20)}} = \frac{\partial V_\lambda}{\partial x_\varkappa^{(20)}}, \qquad \frac{\partial V_\varkappa}{\partial x_\lambda^{(02)}} = \frac{\partial V_\lambda}{\partial x_\varkappa^{(02)}}, \qquad \frac{\partial V_\varkappa}{\partial x_\lambda^{(11)}} = \frac{\partial V_\lambda}{\partial x_\varkappa^{(11)}},$$

$$\frac{\partial V_\varkappa}{\partial x_\lambda^{(10)}} - 2\frac{d}{dt}\frac{\partial V_\varkappa}{\partial x_\lambda^{(20)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial V_\varkappa}{\partial x_\lambda^{(11)}} = -\frac{\partial V_\lambda}{\partial x_\varkappa^{(10)}},$$

$$\frac{\partial V_\varkappa}{\partial x_\lambda^{(01)}} - 2\frac{d}{du}\frac{\partial V_\varkappa}{\partial x_\lambda^{(02)}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V_\varkappa}{\partial x_\lambda^{(11)}} = -\frac{\partial V_\lambda}{\partial x_\varkappa^{(01)}},$$

$$\frac{\partial V_\varkappa}{\partial x_\lambda} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V_\varkappa}{\partial x_\lambda^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial V_\varkappa}{\partial x_\lambda^{(01)}} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial V_\varkappa}{\partial x_\lambda^{(20)}} + \frac{d^2}{dt\,du}\frac{\partial V_\varkappa}{\partial x_\lambda^{(11)}} + \frac{d^2}{du^2}\frac{\partial V_\varkappa}{\partial x_\lambda^{(02)}} = \frac{\partial V_\lambda}{\partial x_\varkappa}$$

genügt.

Sind also z. B. nur zwei abhängige Grössen x_1 und x_2 in dem Problem vorhanden, und wirkt zwischen diesen durch Raum- und Massengrössen oder physikalische Erscheinungen bestimmten Grössen eine innere Kraft R von der Art, dass sie durch einen Ausdruck von der Form

$$R = \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial r^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial W}{\partial r^{(01)}}$$

bestimmt ist, worin W eine Function von $t, u, r, r^{(10)}, r^{(01)}$ ist, also R nach den Gleichungen (48.) und (49.) des Hülfsatzes 4. den beiden partiellen Differentialgleichungen identisch genügt:

$$2\frac{\partial R}{\partial r^{(10)}} - 2\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial r^{(20)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial R}{\partial r^{(11)}} = 0$$

$$2\frac{\partial R}{\partial r^{(01)}} - 2\frac{d}{du}\frac{\partial R}{\partial r^{(02)}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial r^{(11)}} = 0,$$

und r eine solche Function von x_1 und x_2 ist, dass die auf x_1 wirkende Kraft durch $R\frac{\partial r}{\partial x_1}$, die auf x_2 wirkende durch $R\frac{\partial r}{\partial x_2}$ dargestelt wird, dann werden, da nach dem Hülfsatz 2.

$$(15.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial x_1} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial R}{\partial x_1^{(10)}} - \dfrac{d}{du}\dfrac{\partial R}{\partial x_1^{(01)}} = \left(\dfrac{\partial R}{\partial r} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial R}{\partial r^{(10)}} - \dfrac{d}{du}\dfrac{\partial R}{\partial r^{(01)}}\right)\dfrac{\partial r}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial R}{\partial x_2} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial R}{\partial x_2^{(10)}} - \dfrac{d}{du}\dfrac{\partial R}{\partial x_2^{(01)}} = \left(\dfrac{\partial R}{\partial r} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial R}{\partial r^{(10)}} - \dfrac{d}{du}\dfrac{\partial R}{\partial r^{(01)}}\right)\dfrac{\partial r}{\partial x_2} \end{cases}$$

ist, die partiellen Differentialgleichungen, welche die Veränderungen der Grössen x_1 und x_2 beschreiben, wenn eine Zwangsbedingung zwischen diesen nicht gegeben ist, in der Form dargestellt sein

$$-\frac{\partial T}{\partial x_1}+\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x_1^{(10)}}+\frac{d}{du}\frac{\partial T}{\partial x_1^{(01)}}=\frac{\partial R}{\partial x_1}-\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial x_1^{(10)}}-\frac{d}{du}\frac{\partial R}{\partial x_1^{(01)}}$$
$$-\frac{\partial T}{\partial x_2}+\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x_2^{(10)}}+\frac{d}{du}\frac{\partial T}{\partial x_2^{(01)}}=\frac{\partial R}{\partial x_2}-\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial x_2^{(10)}}-\frac{d}{du}\frac{\partial R}{\partial x_2^{(01)}}.$$

Nehmen wir z. B. als Verallgemeinerung der *Weber*schen Kraft

$$R=-\frac{mm_1}{r^2}+\frac{mm_1}{r}\left(\frac{r^{(10)2}}{k_1^2}+\frac{r^{(01)2}}{k_0^2}+\frac{r^{(10)}r^{(01)}}{k^2}\right)-2\frac{mm_1}{r}\left(\frac{r^{(20)}}{k_1^2}+\frac{r^{(02)}}{k_0^2}+\frac{r^{(11)}}{k^2}\right),$$

worin m, m_1, k, k_0, k_1 Constanten bedeuten, so genügt R den beiden partiellen Differentialgleichungen (15.), und zwar wird die Kräftefunction durch

$$W=\frac{mm_1}{r}\left(1+\frac{r^{(10)2}}{k_1^2}+\frac{r^{(01)2}}{k_0^2}+\frac{r^{(10)}r^{(01)}}{k^2}\right)$$

dargestellt sein, während die Bewegungsgleichungen die oben angegebene Form annehmen.

Sollen in dem Ausdrucke für das Maass der Kraft

$$X=-\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x^{(10)}}+\frac{d}{du}\frac{\partial T}{\partial x^{(01)}}$$
$$=-\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial^2 T}{\partial x^{(10)}\partial t}+\frac{\partial^2 T}{\partial x^{(10)}\partial x}x^{(10)}+\frac{\partial^2 T}{\partial x^{(01)}\partial u}+\frac{\partial^2 T}{\partial x^{(01)}\partial x}x^{(01)}$$
$$+\frac{\partial^2 T}{\partial x^{(10)2}}x^{(20)}+2\frac{\partial^2 T}{\partial x^{(10)}\partial x^{(01)}}x^{(11)}+\frac{\partial^2 T}{\partial x^{(01)2}}x^{(02)}$$

die Grössen $t, u, x, x^{(10)}, x^{(01)}$ nicht enthalten sein, so werden

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^{(10)2}},\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^{(10)}\partial x^{(01)}},\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^{(01)2}}$$

Constanten sein müssen, und daher T zunächst die Form annehmen

$$T=a_{10}x^{(10)2}+a_{11}x^{(10)}x^{(01)}+a_{01}x^{(01)2}+\varphi_1(t,u,x)x^{(10)}+\varphi_2(t,u,x)x^{(01)}+\psi(t,u,x)$$

oder vermöge der geforderten Unabhängigkeit von t, u, x

$$T=a_{10}x^{(10)2}+a_{11}x^{(10)}x^{(01)}+a_{01}x^{(01)2}+a,$$

worin $a_{10}, a_{11}, a_{01}, a$ Constanten bedeuten, während das Maass der Kraft durch

$$X=2a_{10}x^{(20)}+2a_{11}x^{(11)}+2a_{01}x^{(02)}$$

dargestellt wird; endlich mag bemerkt werden, dass man in Analogie zur Mechanik wägbarer Massen aus später ersichtlichen Gründen in Rücksicht auf das Energieprincip für die lebendige Kraft die Form wählen wird

$$T=\tfrac{\alpha}{2}(x^{(10)}+x^{(01)})^2,$$

so dass das Maass der Kraft in

$$X = \alpha(x^{(20)} + 2x^{(11)} + x^{(02)})$$

übergeht, und die lebendige Kraft für n abhängige Variable $x_1, x_2, \ldots, x_n$ durch

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_1^n{}_i \alpha_i \left(x_i^{(10)} + x_i^{(01)}\right)^2$$

dargestellt wird.*)

Um das Analogon zur *zweiten Form der Lagrangeschen Gleichungen* zu entwickeln, bemerke man, dass, wenn $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ Grössen sind, durch welche $x_1, x_2, \ldots, x_n$ so ausgedrückt werden können, dass den Zwangsbedingungen

$$F_1(t, u, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \ldots F_m(t, u, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

identisch genügt wird, die Differentialgleichungen für die Veränderungen der $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x_i^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial x_i^{(01)}} = X_i + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

---

*) Der durch die beiden Gleichungen $x'' = 0$, $y'' = 0$ oder $x = \alpha_0 t + \beta_0$, $y = \alpha_1 t + \beta_1$ dargestellten geradlinigen Bewegung eines Punktes in der xy-Ebene entspricht somit die durch die Differentialgleichungen

$$x^{(20)} + 2x^{(11)} + x^{(02)} = 0,\ y^{(20)} + 2y^{(11)} + y^{(02)} = 0,\ z^{(20)} + 2z^{(11)} + z^{(02)} = 0$$

oder

$$x = t\varphi_0(t-u) + \psi_0(t-u),\ y = t\varphi_1(t-u) + \psi_1(t-u),\ z = t\varphi_2(t-u) + \psi_2(t-u)$$

dargestellte Bewegung eines Punktes auf einer Regelfläche, und ähnliche Beziehungen lassen sich als Analogon zu der nächst einfacheren durch die Differentialgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g_0,\ \frac{d^2y}{dt^2} = g_1$$

oder durch

$$x = \frac{g_0}{2} t^2 + v_0 t + x_0,\ y = \frac{g_1}{2} t^2 + v_1 t + y_0$$

dargestellten Bewegung für die Differentialgleichungen

$$x^{(20)} + 2x^{(11)} + x^{(02)} = g_0,\ y^{(20)} + 2y^{(11)} + y^{(02)} = g_1,\ z^{(20)} + 2z^{(11)} + z^{(02)} = g_2,$$

in deren Integralen

$$x = \frac{g_0}{2} t^2 + t\varphi_0(t-u) + \psi_0(t-u),\ y = \frac{g_1}{2} t^2 + t\varphi_1(t-u) + \psi_1(t-u),$$

$$z = \frac{g_2}{2} t^2 + t\varphi_2(t-u) + \psi_2(t-u)$$

für die Bewegung eines Punktes auf den hierdurch charakterisirten Flächen aufstellen.

wenn dieselben mit $\frac{\partial x_i}{\partial p_s}$ multiplicirt, addirt und

$$\sum_1^n{}_i \, X_i \frac{\partial x_i}{\partial p_s} = P_s$$

gesetzt wird, vermöge des Hülfsatzes 2. in

$$\text{(16.)} \qquad \frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}} = P_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, \mu)$$

übergehen, welche wieder in Form eines Integralprincips durch

$$\text{(17.)} \qquad \delta \int_{t_0}^{t_1} \int_{u_0}^{u_1} \left(H - \sum_1^\mu{}_s P_s p_s \right) du\, dt = 0$$

dargestellt werden können, wenn die Variationen der Grössen $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ an den Grenzen des (t, u)-Gebietes verschwinden sollen, und P_s als Function von t und u gegeben ist.

Haben wir nur *eine* von t und u abhängige Grösse x, auf welche eine äussere Ursache der Veränderung nicht wirkt, so liefert das *Hamilton*sche Princip

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \int_{u_0}^{u_1} H\, du\, dt = 0$$

für

$$H = \sqrt{1 + x^{(10)^2} + x^{(01)^2}}$$

die partielle Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \sqrt{1 + x^{(10)^2} + x^{(01)^2}}}{\partial x^{(10)}} + \frac{d}{du}\frac{\partial \sqrt{1 + x^{(10)^2} + x^{(01)^2}}}{\partial x^{(01)}} = 0,$$

und es wird somit, wenn man x, t, u als Coordinaten auffasst, der durch diese drei Coordinaten bestimmte Punkt sich auf einer Minimalfläche bewegen — worauf wir später bei dem erweiterten Princip der kleinsten Wirkung wieder zurückkommen werden.

§ 3.

Das erweiterte Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft.

Gehen wir von den Gleichungen

$$\text{(1.)} \qquad \frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}} = P_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, \mu)$$

aus, so ergeben sich zunächst die beiden Beziehungen

$$\Sigma_s p_s^{(10)} \frac{\partial H}{\partial p_s} - \Sigma_s p_s^{(10)} \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}} - \Sigma_s p_s^{(10)} \frac{d}{du} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}} = \Sigma_s P_s p_s^{(10)},$$

$$\Sigma_s p_s^{(01)} \frac{\partial H}{\partial p_s} - \Sigma_s p_s^{(01)} \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}} - \Sigma_s p_s^{(01)} \frac{d}{du} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}} = \Sigma_s P_s p_s^{(01)},$$

welche, wenn H die unabhängigen Variabeln t und u nicht explicite enthält, vermöge der Beziehungen

$$\frac{dH}{dt} = \Sigma_s \frac{\partial H}{\partial p_s} p_s^{(10)} + \Sigma_s \frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}} p_s^{(20)} + \Sigma_s \frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}} p_s^{(11)},$$

$$\frac{dH}{du} = \Sigma_s \frac{\partial H}{\partial p_s} p_s^{(01)} + \Sigma_s \frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}} p_s^{(11)} + \Sigma_s \frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}} p_s^{(02)}$$

in

$$(2.) \qquad \frac{dH}{dt} - \frac{d}{dt} \Sigma_s p_s^{(10)} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}} - \frac{d}{du} \Sigma_s p_s^{(10)} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}} = \Sigma_s P_s p_s^{(10)},$$

$$(3.) \qquad \frac{dH}{du} - \frac{d}{dt} \Sigma_s p_s^{(01)} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}} - \frac{d}{du} \Sigma_s p_s^{(01)} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}} = \Sigma_s P_s p_s^{(01)}$$

übergehen.

Durch Multiplication der Gleichungen (2.) und (3.) mit dt und du und Addition folgt

$$(4.) \qquad \left\{ \begin{aligned} dH - \Big\{ \Big[\frac{d}{dt} \Sigma_s p_s^{(10)} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}} + \frac{d}{du} \Sigma_s p_s^{(10)} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}} \Big] dt \\ + \Big[\frac{d}{dt} \Sigma_s p_s^{(01)} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}} + \frac{d}{du} \Sigma_s p_s^{(01)} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}} \Big] du \Big\} \end{aligned} \right. = \Sigma_s P_s dp_s,$$

und aus dieser Gleichung kann nicht, wie aus der analogen für *eine* unabhängige Variable, ein Integral der partiellen Differentialgleichungen (2.) hergeleitet, sondern nur geschlossen werden, dass, wenn die äusseren Kräfte P_s als Constanten oder als solche Functionen der abhängigen Variabeln gegeben sind, dass $\Sigma_s P_s dp_s$ ein vollständiges Differential ist, die Klammer $\{\}$ in Gleichung (4.) mit Benutzung der Differentialgleichungen (1.) ebenfalls ein vollständiges Differential sein wird.*)

---

*) So wird z. B. für

$$H = p p^{(10)} p^{(01)}, \qquad P = 0$$

die Differentialgleichung (1.) in

$$(\alpha) \qquad p^{(10)} p^{(01)} + 2 p p^{(11)} = 0$$

Für kinetische Potentiale erster Ordnung H mit nur *einer* unabängigen Variablen t folgt, wenn das Problem vermöge der gegebenen Bedingungsgleichungen auf nur *eine* abhängige Variable p führt, und die Kraft P constant oder eine Function von p ist, aus dem durch die Gleichung

$$H - p' \frac{\partial H}{\partial p'} = \int P\, dp + h$$

ausgedrückten Energieprincip, zu dessen Gültigkeit angenommen werden muss, dass H die unabhängige Variable t nicht explicite enthält, durch Differentiation nach t die *Lagrange*sche Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'} = P,$$

während für mehr als *eine* abhängige Variable das Energieprincip die Bewegungsgleichungen nicht nothwendig nach sich zieht, sondern nur umgekehrt aus den letzteren die Existenz des ersteren gefolgert werden kann.

Gehen wir nun in Analogie zur Mechanik wägbarer Massen für kinetische Potentiale erster Ordnung H von zwei unabhängigen Variablen t und u, und *einer* abhängigen Variablen, auf welche allein die Bedingungen

---

übergehen, und die oben bezeichnete Klammer die Form

$$A\,dt + B\,du$$

annehmen, worin

$$A = 2\,p^{(01)}p^{(10)2} + p\,p^{(01)}p^{(20)} + 3\,p\,p^{(10)}p^{(11)}, \qquad B = 2\,p^{(10)}p^{(01)2} + p\,p^{(10)}p^{(02)} + 3\,p\,p^{(01)}p^{(11)}$$

ist; es folgt aber aus

$$\frac{dA}{du} = 2\,p^{(10)2}p^{(02)} + 7\,p^{(10)}p^{(01)}p^{(11)} + p^{(01)2}p^{(20)} + p\,p^{(02)}p^{(20)} + p\,p^{(01)}p^{(21)} + 3\,p\,p^{(11)2} + 3\,p\,p^{(10)}p^{(12)}$$

$$\frac{dB}{dt} = 2\,p^{(01)2}p^{(20)} + 7\,p^{(10)}p^{(01)}p^{(11)} + p^{(10)2}p^{(02)} + p\,p^{(20)}p^{(02)} + p\,p^{(10)}p^{(12)} + 3\,p\,p^{(11)2} + 3\,p\,p^{(01)}p^{(21)}$$

die Differenz

$$\frac{dA}{du} - \frac{dB}{dt} = p^{(10)2}p^{(02)} - p^{(01)2}p^{(20)} - 2\,p\,p^{(01)}p^{(21)} + 2\,p\,p^{(10)}p^{(12)},$$

und man sieht unmittelbar, dass, wenn die Gleichung (α) nach t und u differentiirt wird, sich durch Multiplication der so erhaltenen Gleichungen mit $p^{(01)}$ und $p^{(10)}$ und Subtraction

$$\frac{dA}{du} = \frac{dB}{dt}$$

ergiebt.

der Aufgabe führen sollen, von der durch die Gleichung

$$(5.) \qquad H - p^{(10)} \frac{\partial H}{\partial p^{(10)}} - p^{(01)} \frac{\partial H}{\partial p^{(01)}} = \int P dp + h$$

dargestellten Form des Energieprincips aus, zu dessen Existenz wiederum angenommen werden soll, dass H die unabhängigen Variablen t und u nicht explicite enthält, und differentiiren die Gleichung (5.) nach t und u, so ergiebt sich, unter der Voraussetzung, dass P constant oder als Function von p gegeben ist,

$$(6.) \quad \left\{ \begin{aligned} & p^{(10)} \left(\frac{\partial H}{\partial p} - p^{(10)} \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)} \partial p} - p^{(01)} \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(01)} \partial p} \right) \\ & \qquad - p^{(20)} \left(p^{(10)} \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)^2}} + p^{(01)} \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)} \partial p^{(01)}} \right) \\ & \qquad\qquad - p^{(11)} \left(p^{(10)} \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)} \partial p^{(01)}} + p^{(01)} \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(01)^2}} \right) = P p^{(10)}, \end{aligned} \right.$$

$$(7.) \quad \left\{ \begin{aligned} & p^{(01)} \left(\frac{\partial H}{\partial p} - p^{(10)} \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)} \partial p} - p^{(01)} \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(01)} \partial p} \right) \\ & \qquad - p^{(11)} \left(p^{(10)} \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)^2}} + p^{(01)} \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(01)} \partial p^{(10)}} \right) \\ & \qquad\qquad - p^{(02)} \left(p^{(10)} \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)} \partial p^{(01)}} + p^{(01)} \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(01)^2}} \right) = P p^{(01)}. \end{aligned} \right.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)^2}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)} \partial p^{(01)}}$$

und addirt dieselben, so erhält man, *wenn das kinetische Potential H der Bedingung unterworfen wird, dass dasselbe die Beziehung*

$$(8.) \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)^2}} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(01)^2}} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)} \partial p^{(01)}} \right)^2$$

identisch befriedigt, nach Division der so entstandenen Gleichung durch

$$p^{(10)} \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)^2}} + p^{(01)} \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)} \partial p^{(01)}},$$

welcher Ausdruck als von Null verschieden vorausgesetzt wird, die Beziehung

$$\frac{\partial H}{\partial p} - p^{(10)} \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)} \partial p} - p^{(01)} \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(01)} \partial p} - \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)^2}} p^{(20)} - 2 \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)} \partial p^{(01)}} p^{(11)} - \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(01)^2}} p^{(02)} = P$$

oder die erweiterte *Lagrange*sche Gleichung

$$(9.) \qquad \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial p^{(01)}} = P,$$

und zwar sieht man leicht, *dass die Bedingung* (8.) *nothwendig und hinreichend dafür ist, dass sich aus dem Energieprincip die Lagrangesche Gleichung herleiten lässt.*

Für den dem freien und unfreien Systeme in der Mechanik wägbarer Massen entsprechenden Fall, in welchem das kinetische Potential H in den Grössen $p, p^{(10)}, p^{(01)}$ *homogen vom zweiten Grade ist mit constanten oder von* p *abhängigen Coefficienten,* also die Form hat

$$H = f_{10}(p)\,p^{(10)2} + f_{11}(p)\,p^{(10)}\,p^{(01)} + f_{01}(p)\,p^{(01)2} + f(p),$$

erfordert die Existenz des Energieprincips nach (8.) die identische Beziehung

$$f_{11}(p)^2 = 4\,f_{10}(p)\,f_{01}(p),$$

und es nimmt somit für die Form des kinetischen Potentials

$$H = \left(\sqrt{f_{10}(p)}\,p^{(10)} + \sqrt{f_{01}(p)}\,p^{(01)}\right)^2 + f(p),$$

worin der erste Theil nach dem Früheren als die lebendige Kraft aufzufassen ist, das Energieprincip die Gestalt an

$$-\left(\sqrt{f_{10}(p)}\,p^{(10)} + \sqrt{f_{01}(p)}\,p^{(01)}\right)^2 + f(p) = h.$$

Die Annahme, dass das Energieprincip die Form besitzt

$$(10.) \qquad H - p^{(10)}\frac{\partial H}{\partial p^{(10)}} - p^{(01)}\frac{\partial H}{\partial p^{(01)}} = \int P\,dp + f(\varphi(p, p^{(10)}, p^{(01)})),$$

worin f eine beliebige, φ eine noch zu bestimmende Function ist, also ein Zwischenintegral der *Lagrange*schen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung (9.) sein soll, führt auf die den Gleichungen (6.) und (7.) analogen Beziehungen, deren rechte Seiten durch

$$Pp^{(10)} + \frac{df}{d\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}p^{(10)} + \frac{\partial\varphi}{\partial p^{(10)}}p^{(20)} + \frac{\partial\varphi}{\partial p^{(01)}}p^{(11)}\right),$$

$$Pp^{(01)} + \frac{df}{d\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}p^{(01)} + \frac{\partial\varphi}{\partial p^{(10)}}p^{(11)} + \frac{\partial\varphi}{\partial p^{(01)}}p^{(02)}\right)$$

dargestellt sind, und man sieht unmittelbar, dass die Multiplication dieser Gleichungen mit

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)2}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)}\partial p^{(01)}},$$

Addition derselben und Identificirung mit (9.) unter Beibehaltung der Be-

dingung (8.) verlangt, ***dass φ eine Constante ist, dass wir also auf die Gleichung*** (5.) ***zurückgeführt werden.***

Soll jedoch die Function φ auch t und u explicite enthalten dürfen, so wird zunächst

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}\,\frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)2}} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\,\frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)}\partial p^{(01)}} = 0$$

identisch befriedigt sein müssen, und da, wie wir eben gesehen haben, φ von p, $p^{(10)}$, $p^{(01)}$ unabhängig sein muss, vermöge (8.)

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)2}} = \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)}\partial p^{(01)}} = \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(01)2}}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0$$

sein, in welchem Falle dann das Energieprincip die Form annimmt

$$H - p^{(10)}\,\frac{\partial H}{\partial p^{(10)}} - p^{(01)}\,\frac{\partial H}{\partial p^{(01)}} = \omega\,(t-u),$$

worin ω eine willkürliche Function bedeutet, also selbst ein Zwischenintegral ist; so wird, wenn in Analogie zur Mechanik wägbarer Massen, wie oben hervorgehoben, die lebendige Kraft in der Form

$$T = \frac{a}{2}\left(x^{(10)} + x^{(01)}\right)^2 \quad \text{also} \quad H = -\frac{a}{2}\left(x^{(10)} + x^{(01)}\right)^2 + f(p)$$

angenommen wird, das Energieprincip durch das Zwischenintegral dargestellt sein

$$\frac{a}{2}\left(x^{(10)} + x^{(01)}\right)^2 + f(p) = \omega\,(t-u).$$

Um zu sehen, ob auch für zwei abhängige Variable das in der analogen Form angenommene Energieprincip

$$(11.)\quad \left\{\begin{array}{l} H - \left(p_1^{(10)}\,\dfrac{\partial H}{\partial p_1^{(10)}} + p_2^{(10)}\,\dfrac{\partial H}{\partial p_2^{(10)}}\right) - \left(p_1^{(01)}\,\dfrac{\partial H}{\partial p_1^{(01)}} + p_2^{(01)}\,\dfrac{\partial H}{\partial p_2^{(01)}}\right) \\ \qquad\qquad = \int\left(P_1\,dp_1 + P_2\,dp_2\right) + h, \end{array}\right.$$

worin P_1 und P_2 solche Functionen von p_1 und p_2 sind, dass

$$P_1\,dp_1 + P_2\,dp_2$$

ein vollständiges Differential ist, unter bestimmt zu formulirenden Bedingungen nothwendig auf die *Lagrange*schen Gleichungen führt, die in der Form

$$(12.)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial H}{\partial p_1} - \dfrac{d}{dt}\,\dfrac{\partial H}{\partial p_1^{(10)}} - \dfrac{d}{du}\,\dfrac{\partial H}{\partial p_1^{(01)}} = P_1, \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_2} - \dfrac{d}{dt}\,\dfrac{\partial H}{\partial p_2^{(10)}} - \dfrac{d}{du}\,\dfrac{\partial H}{\partial p_2^{(01)}} = P_2 \end{array}\right.$$

oder, da H wiederum die unabhängigen Variablen t und u nicht explicite enthalten soll, durch

$$(13.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial p_1} - \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(10)}\partial p_1} p_1^{(10)} - \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(10)}\partial p_2} p_2^{(10)} - \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(01)}\partial p_1} p_1^{(01)} - \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(01)}\partial p_2} p_2^{(01)} \\ - \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(10)2}} p_1^{(20)} - 2\dfrac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(10)}\partial p_1^{(01)}} p_1^{(11)} - \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(10)}\partial p_2^{(10)}} p_2^{(20)} - \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(10)}\partial p_2^{(01)}} p_2^{(11)} \\ \qquad - \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(01)2}} p_1^{(02)} - \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(01)}\partial p_2^{(10)}} p_2^{(11)} - \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(01)}\partial p_2^{(01)}} p_2^{(02)} = P_1, \end{cases}$$

$$(14.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial p_2} - \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(10)}\partial p_1} p_1^{(10)} - \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(10)}\partial p_2} p_2^{(10)} - \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(01)}\partial p_1} p_1^{(01)} - \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(01)}\partial p_2} p_2^{(01)} \\ - \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(10)}\partial p_1^{(10)}} p_1^{(20)} - \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(10)}\partial p_1^{(01)}} p_1^{(11)} - \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(10)2}} p_2^{(20)} - 2\dfrac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(10)}\partial p_2^{(01)}} p_2^{(11)} \\ \qquad - \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(01)}\partial p_1^{(10)}} p_1^{(11)} - \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(01)}\partial p_1^{(01)}} p_1^{(02)} - \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(01)2}} p_2^{(02)} = P_2 \end{cases}$$

gegeben sind, differentiire man die Gleichung (11.) nach t und u, so dass sich

$$(15.)\quad \begin{cases} \sum\limits_{\mu=1,2} \dfrac{\partial H}{\partial p_\mu} p_\mu^{(10)} - \sum\limits_{\mu,\nu=1,2} p_\mu^{(10)} \Big(\dfrac{\partial^2 H}{\partial p_\mu^{(10)}\partial p_\nu} p_\nu^{(10)} \\ \qquad + \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_\mu^{(10)}\partial p_\nu^{(10)}} p_\nu^{(20)} + \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_\mu^{(10)}\partial p_\nu^{(01)}} p_\nu^{(11)} \Big) \\ - \sum\limits_{\mu,\nu=1,2} p_\mu^{(01)} \Big(\dfrac{\partial^2 H}{\partial p_\mu^{(01)}\partial p_\nu} p_\nu^{(10)} + \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_\mu^{(01)}\partial p_\nu^{(10)}} p_\nu^{(20)} + \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_\mu^{(01)}\partial p_\nu^{(01)}} p_\nu^{(11)} \Big) \\ \qquad = P_1 p_1^{(10)} + P_2 p_2^{(10)}, \end{cases}$$

$$(16.)\quad \begin{cases} \sum\limits_{\mu=1,2} \dfrac{\partial H}{\partial p_\mu} p_\mu^{(01)} - \sum\limits_{\mu,\nu=1,2} p_\mu^{(10)} \Big(\dfrac{\partial^2 H}{\partial p_\mu^{(10)}\partial p_\nu} p_\nu^{(01)} \\ \qquad + \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_\mu^{(10)}\partial p^{(10)}} p_\nu^{(11)} + \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_\mu^{(10)}\partial p_\nu^{(01)}} p_\nu^{(02)} \Big) \\ - \sum\limits_{\mu,\nu=1,2} p_\mu^{(01)} \Big(\dfrac{\partial^2 H}{\partial p_\mu^{(01)}\partial p_\nu} p_\nu^{(01)} + \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_\mu^{(01)}\partial p_\nu^{(10)}} p_\nu^{(11)} + \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_\mu^{(01)}\partial p_\nu^{(01)}} p_\nu^{(02)} \Big) \\ \qquad = P_1 p_1^{(01)} + P_2 p_2^{(01)} \end{cases}$$

ergiebt; addirt man nun die mit den willkürlichen Grössen λ_1, λ_2 multiplicirten Gleichungen (15.) und (16.), ebenso die mit

$$\lambda_1 p_1^{(10)} + \lambda_2 p_1^{(01)}, \qquad \lambda_1 p_2^{(10)} + \lambda_2 p_2^{(01)}$$

multiplicirten Gleichungen (13.) und (14.) zu einander, so stimmen für beliebige Werthe von λ_1 und λ_2 die Coefficienten der ersten partiellen Ableitungen

von H und die rechten Seiten in den resultirenden Gleichungen überein; um nun ferner die von den zweiten partiellen Ableitungen der p freien Glieder in Uebereinstimmung zu bringen, wird sich, wie leicht zu sehen, als Bedingung die Existenz der beiden Beziehungen ergeben

$$(17.)\qquad \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(01)}\partial p_2} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(01)}\partial p_1}, \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(10)}\partial p_2} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(10)}\partial p_1}.$$

Vergleicht man nun die Coefficienten von $p_1^{(20)}$, so erhält man

$$\lambda_1\Big(p_1^{(10)}\frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(10)}\partial p_1^{(10)}} + p_1^{(01)}\frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(01)}\partial p_1^{(10)}} + p_2^{(10)}\frac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(10)}\partial p_1^{(10)}} + p_2^{(01)}\frac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(01)}\partial p_1^{(10)}}\Big)$$
$$= \big(\lambda_1 p_1^{(10)} + \lambda_2 p_1^{(01)}\big)\frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)^2}} + \big(\lambda_1 p_2^{(10)} + \lambda_2 p_2^{(01)}\big)\frac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(10)}\partial p_1^{(10)}}$$

oder

$$(18.)\qquad \left\{\begin{array}{l} \lambda_1\Big(p_1^{(01)}\dfrac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(01)}\partial p_1^{(10)}} + p_2^{(01)}\dfrac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(01)}\partial p_1^{(10)}}\Big) \\ \qquad = \lambda_2\Big(p_1^{(01)}\dfrac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(10)^2}} + p_2^{(01)}\dfrac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(10)}\partial p_1^{(10)}}\Big), \end{array}\right.$$

und soll – was zur Identificirung der oben hergeleiteten Gleichungen mit den Differentialgleichungen (13.) und (14.) nothwendig und hinreichend ist – diese Beziehung für mindestens zwei Werthepaare von λ_1 und λ_2 bestehen, so folgt die Bedingungsgleichung

$$(19.)\qquad \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(10)}\partial p_1^{(10)}}\,\frac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(01)}\partial p_1^{(10)}} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(10)}\partial p_1^{(01)}}\,\frac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(10)}\partial p_1^{(10)}},$$

und verfährt man genau ebenso für die Identificirung der Coefficienten von $p_2^{(02)}$, $p_1^{(20)}$, $p_2^{(20)}$, $p_1^{(11)}$, $p_2^{(11)}$, so ergeben sich als nothwendige und hinreichende Bedingungen für dieselben Werthepaare

$$(20.)\qquad \frac{\partial^2 H}{\partial p_\gamma^{(10)}\partial p_\gamma^{(10)}}\,\frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha^{(01)}\partial p_\beta^{(b)}} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_\gamma^{(10)}\partial p_\gamma^{(01)}}\,\frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha^{(10)}\partial p_\beta^{(b)}},$$

worin α, β, γ die Zahlen 1 oder 2 bedeuten und b den Index (10) oder (01) darstellt.

Wir finden somit mit Zuziehung der Gleichungen (17.) ***als nothwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass für das durch die beiden Lagrangeschen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung***

$$\frac{dH}{\partial p_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_1^{(10)}} - \frac{d}{\partial u}\frac{\partial H}{\partial p_1^{(01)}} = P_1, \qquad \frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_2^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial p_2^{(01)}} = P_2$$

beschriebene Problem, worin das von $p_1, p_2, p_1^{(10)}, p_1^{(01)}, p_2^{(10)}, p_2^{(01)}$ ***abhängige***

kinetische Potential H die unabhängigen Variabeln t und u nicht explicite enthält, und die von p_1 und p_2 abhängigen äusseren Kräfte P_1 und P_2 der Beschränkung unterliegen

$$\frac{\partial P_1}{\partial p_2} = \frac{\partial P_2}{\partial p_1},$$

das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft in der Form existirt

$$(21.)\quad \left\{ H - \left(p_1^{(10)} \frac{\partial H}{\partial p_1^{(10)}} + p_2^{(10)} \frac{\partial H}{\partial p_2^{(10)}}\right) - \left(p_1^{(01)} \frac{\partial H}{\partial p_1^{(01)}} + p_2^{(01)} \frac{\partial H}{\partial p_2^{(01)}}\right) = \int (P_1 dp_1 + P_2 dp_2) + h \right.$$

— und es ist dies die einzig mögliche Form — die identisch zu befriedigenden Beziehungen

$$(22.)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(01)} \partial p_2} = \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(01)} \partial p_1}, \quad \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(10)} \partial p_2} = \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(10)} \partial p_1}, \\ \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(10)} \partial p_2^{(01)}} = \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(10)} \partial p_1^{(01)}}, \quad \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(10)^2}} \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(01)^2}} = \left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(10)} \partial p_1^{(01)}}\right)^2, \\ \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(10)^2}} \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(01)^2}} = \left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(10)} \partial p_2^{(01)}}\right)^2, \quad \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(01)} \partial p_2^{(01)}} \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(10)} \partial p_2^{(10)}} = \left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(10)} \partial p_2^{(01)}}\right)^2, \\ \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(10)^2}} \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(01)^2}} = \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(10)^2}} \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(01)^2}}, \quad \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(10)^2}} \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(01)} \partial p_2^{(01)}} = \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(01)^2}} \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(10)} \partial p_2^{(10)}}. \end{array} \right.$$

Für den dem freien Systeme in der Mechanik wägbarer Massen entsprechenden Fall, in welchem das kinetische Potential H in den Grössen $p_1^{(10)}$, $p_1^{(01)}$, $p_2^{(10)}$, $p_2^{(01)}$ homogen vom zweiten Grade ist mit constanten Coefficienten**), also die Form hat

$$H = a_1 p_1^{(10)^2} + c_1 p_1^{(01)^2} + a_2 p_2^{(10)^2} + c_2 p_2^{(01)^2} + 2 b_1 p_1^{(10)} p_1^{(01)} + 2 b_2 p_1^{(10)} p_2^{(10)} + 2 b_3 p_1^{(10)} p_2^{(01)} + 2 b_4 p_1^{(01)} p_2^{(10)} + 2 b_5 p_1^{(01)} p_2^{(01)} + 2 b_6 p_2^{(10)} p_2^{(01)} + f(p_1, p_2),$$

liefern die oben aufgestellten Beziehungen die für die Existenz des Princips der Erhaltung der lebendigen Kraft nothwendigen und hinreichenden Bedingungen zwischen den constanten Coefficienten

$$b_1^2 = a_1 c_1, \quad b_6^2 = a_2 c_2, \quad b_3 = b_4, \quad a_1 c_2 = a_2 c_1, \quad b_5 b_2 = b_3^2, \quad a_1 b_5 = c_1 b_2,$$

---

*) Man sieht unmittelbar, dass auch Glieder vom ersten Grade in den ersten partiellen Differentialquotienten der Grössen p_1 und p_2 mit constanten Coefficienten vorkommen dürfen.

und *es nimmt somit,* wie leicht zu sehen, *für die Form des kinetischen Potentials*

$$H = A(\alpha p_1^{(10)} + \beta p_1^{(01)})^2 + B(\alpha p_2^{(10)} + \beta p_2^{(01)})^2 + C(\alpha p_1^{(10)} + \beta p_1^{(01)})(\alpha p_2^{(10)} + \beta p_2^{(01)}) + f(p_1, p_2),$$

worin A, B, C, α, β willkürliche Constanten bedeuten, das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft die Gestalt an

$$-A(\alpha p_1^{(10)} + \beta p_1^{(01)})^2 - B(\alpha p_2^{(10)} + \beta p_2^{(01)})^2 - C(\alpha p_1^{(10)} + \beta p_1^{(01)})(\alpha p_2^{(10)} + \beta p_2^{(01)}) + f(p_1, p_2) = \int (P_1 dp_1 + P_2 dp_2) + h.$$

Aus den oben gefundenen Bedingungsgleichungen für das kinetische Potential

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(10)2}} \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(01)2}} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(10)} \partial p_1^{(01)}}\right)^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(10)2}} \frac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(01)2}} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(10)} \partial p_2^{(01)}}\right)^2$$

folgt bekanntlich

$$(23.) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial p_1^{(01)}} = \varphi\left(\dfrac{\partial H}{\partial p_1^{(10)}}, p_1, p_2, p_2^{(10)}, p_2^{(01)}\right), \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_2^{(01)}} = \psi\left(\dfrac{\partial H}{\partial p_2^{(10)}}, p_1, p_2, p_1^{(10)}, p_1^{(01)}\right), \end{cases}$$

worin die Functionen φ und ψ noch weiteren Bedingungen zu unterwerfen sind. Differentiirt man nämlich diese beiden Gleichungen nach $p_1^{(01)}$ und $p_2^{(01)}$, so ergiebt sich

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(01)2}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \dfrac{\partial H}{\partial p_1^{(10)}}} \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(10)} \partial p_1^{(01)}}, \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(01)2}} = \frac{\partial \psi}{\partial \dfrac{\partial H}{\partial p_2^{(10)}}} \frac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(10)} \partial p_2^{(01)}},$$

und durch Multiplication mit

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(10)2}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(10)2}}$$

und Addition vermöge der oben geforderten Beziehung

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(10)2}} \frac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(01)2}} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(10)2}} \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(01)2}}$$

die Bedingungsgleichung

$$(24.) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial \dfrac{\partial H}{\partial p_2^{(10)}}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \dfrac{\partial H}{\partial p_1^{(10)}}}.$$

Differentiirt man ferner die Gleichungen (23.) nach $p_2^{(10)}$ und $p_1^{(10)}$, so ergiebt sich vermöge (24.) und der zu erfüllenden Beziehung

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(10)} \partial p_2^{(01)}} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(10)} \partial p_1^{(01)}}$$

für die partiellen Differentialquotienten der Functionen φ und ψ nach den in diesen explicite vorkommenden Grössen $p_1^{(10)}$ und $p_2^{(10)}$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial p_1^{(10)}} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_2^{(10)}} \tag{25.}$$

und ebenso

$$\frac{\partial \psi}{\partial p_1^{(01)}} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_2^{(01)}}; \tag{26.}$$

man genügt somit den Gleichungen (24.), (25.), (26.), wenn man (23.) die Form giebt

$$\frac{\partial H}{\partial p_1^{(01)}} = \omega(p_1, p_2) \frac{\partial H}{\partial p_1^{(10)}} + \omega_1(p_1, p_2)\, p_2^{(10)} + \omega_2(p_1, p_2)\, p_2^{(01)} + \omega_3(p_1, p_2),$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_2^{(01)}} = \omega(p_1, p_2) \frac{\partial H}{\partial p_2^{(10)}} + \omega_1(p_1, p_2)\, p_1^{(10)} + \omega_2(p_1, p_2)\, p_1^{(01)} + \omega_4(p_1, p_2).$$

Da aber durch Differentiation nach p_2 und p_1

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(01)} \partial p_2} = \omega \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(10)} \partial p_2} + \frac{\partial \omega}{\partial p_2} \frac{\partial H}{\partial p_1^{(10)}} + \frac{\partial \omega_1}{\partial p_2} p_2^{(10)} + \frac{\partial \omega_2}{\partial p_2} p_2^{(01)} + \frac{\partial \omega_3}{\partial p_2},$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(01)} \partial p_1} = \omega \frac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(10)} \partial p_1} + \frac{\partial \omega}{\partial p_1} \frac{\partial H}{\partial p_2^{(10)}} + \frac{\partial \omega_1}{\partial p_1} p_1^{(10)} + \frac{\partial \omega_2}{\partial p_1} p_1^{(01)} + \frac{\partial \omega_4}{\partial p_1},$$

so ergiebt sich durch Subtraction vermöge der beiden ersten Gleichungen (22.)

$$\frac{\partial \omega}{\partial p_2} \frac{\partial H}{\partial p_1^{(10)}} + \frac{\partial \omega_1}{\partial p_2} p_2^{(10)} + \frac{\partial \omega_2}{\partial p_2} p_2^{(01)} + \frac{\partial \omega_3}{\partial p_2} = \frac{\partial \omega}{\partial p_1} \frac{\partial H}{\partial p_2^{(10)}} + \frac{\partial \omega_1}{\partial p_1} p_1^{(10)} + \frac{\partial \omega_2}{\partial p_1} p_1^{(01)} + \frac{\partial \omega_4}{\partial p_1},$$

und somit H quadratisch in $p_1^{(10)}$, $p_2^{(10)}$, $p_1^{(01)}$, $p_2^{(01)}$. *Setzen wir daher*

$$\begin{aligned} H = {} & f_{10}\, p_1^{(10)2} + f_{01}\, p_1^{(01)2} + f_{20}\, p_2^{(10)2} + f_{02}\, p_2^{(01)2} + \varphi_1\, p_1^{(10)}\, p_1^{(01)} \\ & + \varphi_2\, p_1^{(10)}\, p_2^{(10)} + \varphi_3\, p_1^{(10)}\, p_2^{(01)} + \varphi_4\, p_1^{(01)}\, p_2^{(10)} + \varphi_5\, p_1^{(01)}\, p_2^{(01)} \\ & + \varphi_6\, p_2^{(10)}\, p_2^{(01)} + \psi_1\, p_1^{(10)} + \psi_2\, p_2^{(10)} + \psi_3\, p_1^{(01)} + \psi_4\, p_2^{(01)} + \psi, \end{aligned}$$

worin die Functionen f, φ, ψ nur von p_1 und p_2 abhängen, *und nach den oben* ***für die Existenz des Princips der Erhaltung der lebendigen Kraft aufgestellten nothwendigen und hinreichenden Bedingungen***, wie leicht zu sehen, *den* ***Beschränkungen unterliegen, dass***

$$4 f_{10} f_{01} = \varphi_1^2, \quad 4 f_{20} f_{02} = \varphi_6^2, \quad \varphi_3 = \varphi_4, \quad f_{10} f_{02} = f_{20} f_{01}, \quad \varphi_2 \varphi_5 = \varphi_3^2,$$
$$f_{10} \varphi_5 = f_{01} \varphi_3,$$
$$2 \frac{\partial f_{01}}{\partial p_2} = \frac{\partial \varphi_5}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_2} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial \varphi_4}{\partial p_2} = \frac{\partial \varphi_6}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial \varphi_5}{\partial p_2} = 2 \frac{\partial f_{02}}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial \psi_3}{\partial p_2} = \frac{\partial \psi_4}{\partial p_1},$$
$$2 \frac{\partial f_{10}}{\partial p_2} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_2} = 2 \frac{\partial f_{20}}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial p_2} = \frac{\partial \psi_2}{\partial p_1},$$

so erhalten wir das Energieprincip in der Form

$$H - \left(p_1^{(10)} \frac{\partial H}{\partial p_1^{(10)}} + p_2^{(10)} \frac{\partial H}{\partial p_2^{(10)}} \right) - \left(p_1^{(01)} \frac{\partial H}{\partial p_1^{(01)}} + p_2^{(01)} \frac{\partial H}{\partial p_2^{(01)}} \right)$$
$$= \int (P_1 \, dp_1 + P_2 \, dp_2) + h$$

für den dem freien und unfreien Systeme in der Mechanik wägbarer Massen entsprechenden Fall.

Nachdem wir die Form des Princips der Energie dadurch gefunden, dass wir für kinetische Potentiale erster Ordnung eine zwischen den beiden unabhängigen Variablen t und u, einer oder zwei abhängigen Variabeln und deren ersten partiellen Ableitungen bestehende Beziehung suchten, welche die Existenz der *Lagrange*schen Gleichungen nothwendig nach sich zog, wollen wir jetzt umgekehrt aus den *Lagrange*schen Gleichungen das Bestehen jener Beziehung, welche das Energieprincip darstellt, herleiten, um so zu der für beliebig viele abhängige Variable analogen Relation zu gelangen, die dann nicht mehr, wie es auch in der Mechanik wägbarer Massen der Fall ist, das Bestehen der *Lagrange*schen Gleichung zur nothwendigen Folge hat.

Es wird genügen, zunächst den Fall *einer* abhängigen Variablen p ins Auge zu fassen, für den sich aus der *Lagrange*schen Gleichung

$$\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p^{(10)}} - \frac{d}{du} \frac{\partial H}{\partial p^{(01)}} = P \tag{27.}$$

der Gleichung (4.) gemäss

$$\begin{cases} dH - \left\{ \frac{d}{dt} \left(p^{(10)} \frac{\partial H}{\partial p^{(10)}} \right) + \frac{d}{du} \left(p^{(10)} \frac{\partial H}{\partial p^{(01)}} \right) \right\} dt \\ \qquad - \left\{ \frac{d}{dt} \left(p^{(01)} \frac{\partial H}{\partial p^{(10)}} \right) + \frac{d}{du} \left(p^{(01)} \frac{\partial H}{\partial p^{(01)}} \right) \right\} du = P \, dp \end{cases} \tag{28.}$$

ergiebt. Soll sich nun hieraus das Energieprincip in der Form

$$H - p^{(10)} \frac{\partial H}{\partial p^{(10)}} - p^{(01)} \frac{\partial H}{\partial p^{(01)}} = \int P \, dp + h \tag{29.}$$

herleiten lassen, so würde durch totale Differentiation

$$(30.)\quad \begin{cases} dH - \left\{ \frac{d}{dt}\left(p^{(10)}\frac{\partial H}{\partial p^{(10)}}\right) + \frac{d}{dt}\left(p^{(01)}\frac{\partial H}{\partial p^{(01)}}\right)\right\} dt \\ \qquad - \left\{ \frac{d}{du}\left(p^{(10)}\frac{\partial H}{\partial p^{(10)}}\right) + \frac{d}{du}\left(p^{(01)}\frac{\partial H}{\partial p^{(01)}}\right)\right\} du = P\,dp \end{cases}$$

folgen, und die Identificirung der beiden Beziehungen (28.) und (30.) liefert die Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(p^{(01)}\frac{\partial H}{\partial p^{(10)}}\right) = \frac{d}{du}\left(p^{(10)}\frac{\partial H}{\partial p^{(10)}}\right) \quad \text{und} \quad \frac{d}{du}\left(p^{(10)}\frac{\partial H}{\partial p^{(01)}}\right) = \frac{d}{dt}\left(p^{(01)}\frac{\partial H}{\partial p^{(01)}}\right)$$

oder

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p^{(01)^2}}\left(p^{(10)}p^{(02)} - p^{(01)}p^{(11)}\right) = \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)}\,\partial p^{(01)}}\left(p^{(01)}p^{(20)} - p^{(10)}p^{(11)}\right),$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)}\partial p^{(01)}}\left(p^{(10)}p^{(02)} - p^{(01)}p^{(11)}\right) = \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)^2}}\left(p^{(01)}p^{(20)} - p^{(10)}p^{(11)}\right),$$

woraus sich die für die Existenz des Princips der Energie nothwendige und hinreichende Bedingung für das kinetische Potential H ergiebt:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)^2}}\,\frac{\partial^2 H}{\partial p^{(01)^2}} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)}\,\partial p^{(01)}}\right)^2.$$

Genau ebenso ergeben sich die oben für das von zwei abhängigen Variabeln abhängende kinetische Potential zur Existenz des Princips der Energie gefundenen nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, und allgemein werden sich für das in der Form

$$(31.)\quad H - \sum_1^\mu{}_s\, p_s^{(10)}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}} - \sum_1^\mu{}_s\, p_s^{(01)}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}} = \int \sum_1^\mu{}_s\, P_s\,dp_s + h$$

darzustellende Energieprincip durch Identificirung der Gleichung (4.) und des totalen Differentiales von (31.)

$$dH - \left\{ \frac{d}{dt}\sum_1^\mu{}_s\, p_s^{(10)}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}} + \frac{d}{dt}\sum_1^\mu{}_s\, p_s^{(01)}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}}\right\} dt$$

$$- \left\{ \frac{d}{du}\sum_1^\mu{}_s\, p_s^{(10)}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}} + \frac{d}{du}\sum_1^\mu{}_s\, p_s^{(01)}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}}\right\} du = \sum_1^\mu{}_s\, P_s\,dp_s$$

die Gleichungen ergeben

$$\frac{d}{dt}\sum_1^\mu{}_s\, p_s^{(01)}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}} = \frac{d}{du}\sum_1^\mu{}_s\, p_s^{(10)}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}} \quad \text{und} \quad \frac{d}{du}\sum_1^\mu{}_s\, p_s^{(10)}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}} = \frac{d}{dt}\sum_1^\mu{}_s\, p_s^{(01)}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}},$$

aus denen genau wie oben für eine oder zwei abhängige Variable die für das Bestehen des Energieprincips nothwendigen und hinreichenden Bedingungen hergeleitet werden können, denen das von

$$t, u, p_1, \ldots, p_\mu, p_1^{(10)}, \ldots, p_\mu^{(10)}, p_1^{(01)}, \ldots, p_\mu^{(01)}$$

abhängige kinetische Potential H genügen muss.

§ 4.

Das erweiterte Princip der kleinsten Wirkung.

Betrachtet man in dem Doppelintegrale

$$J = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} f(x, y, z, p, q)\, dy\, dx,$$

worin $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ ist, x und y als Functionen von v und w, so wird, wenn

$$\frac{\partial x}{\partial v} = x^{(10)}, \quad \frac{\partial x}{\partial w} = x^{(01)}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = y^{(10)}, \quad \frac{\partial y}{\partial w} = y^{(01)}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = z^{(10)}, \quad \frac{\partial z}{\partial w} = z^{(01)}$$

und

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w} = D = x^{(10)} y^{(01)} - x^{(01)} y^{(10)} \tag{1.}$$

gesetzt wird,

$$p = \frac{z^{(10)} y^{(01)} - z^{(01)} y^{(10)}}{D}, \quad q = \frac{z^{(01)} x^{(10)} - z^{(10)} x^{(01)}}{D} \tag{2.}$$

sein, und somit bekanntlich, wenn

$$\left\{ \begin{aligned} & Df\left(x, y, z, \frac{z^{(10)} y^{(01)} - z^{(01)} y^{(10)}}{D}, \frac{z^{(01)} x^{(10)} - z^{(10)} x^{(01)}}{D}\right) \\ & \qquad = F(x, y, z, x^{(10)}, x^{(01)}, y^{(10)}, y^{(01)}, z^{(10)}, z^{(01)}) \end{aligned} \right. \tag{3.}$$

gesetzt wird, das vorgelegte Doppelintegral für die Transformation des (x, y)-Gebietes in das (v, w)-Gebiet in

$$J = \int_{v_0}^{v_1} \int_{w_0}^{w_1} F(x, y, z, x^{(10)}, x^{(01)}, y^{(10)}, y^{(01)}, z^{(10)}, z^{(01)})\, dw\, dv \tag{4.}$$

übergehen.

Soll nun die Variation des gegebenen Doppelintegrales unter der Voraussetzung entwickelt werden, dass auch die Grenzen des gegebenen (x, y)-Gebietes variiren, so wird man die Gleichung (4.) so zu variiren haben, dass δv und δw am Rande des (v, w)-Gebietes verschwinden, und wir erhalten somit

$$
(5.)\quad
\begin{cases}
\delta J = \int_{v_0}^{v_1}\int_{w_0}^{w_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dv}\frac{\partial F}{\partial x^{(10)}} - \frac{d}{dw}\frac{\partial F}{\partial x^{(01)}}\right)\delta x\, dw\, dv \\
\quad + \int_{v_0}^{v_1}\int_{w_0}^{w_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dv}\frac{\partial F}{\partial y^{(10)}} - \frac{d}{dw}\frac{\partial F}{\partial y^{(01)}}\right)\delta y\, dw\, dv \\
\quad + \int_{v_0}^{v_1}\int_{w_0}^{w_1} \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dv}\frac{\partial F}{\partial z^{(10)}} - \frac{d}{dw}\frac{\partial F}{\partial z^{(01)}}\right)\delta z\, dw\, dv \\
\qquad + \int_{v_0}^{v_1} \left[\frac{\partial F}{\partial x^{(01)}} - \frac{\partial F}{\partial x^{(10)}}\frac{dw}{dv}\right]_{w_0}^{w_1}\delta x\, dv \\
\qquad\qquad + \int_{v_0}^{v_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y^{(01)}} - \frac{\partial F}{\partial y^{(10)}}\frac{dw}{dv}\right]_{w_0}^{w_1}\delta y\, dv \\
+ \int_{v_0}^{v_1}\int_{w_0}^{w_1} \left[\frac{\partial F}{\partial z^{(01)}} - \frac{\partial F}{\partial z^{(10)}}\frac{dw}{dv}\right]_{w_0}^{w_1}\delta z\, dv + \left[\int_{w_0}^{w_1}\frac{\partial F}{\partial x^{(10)}}\delta x\, dw\right]_{v_0}^{v_1} \\
\qquad\qquad + \left[\int_{w_0}^{w_1}\frac{\partial F}{\partial y^{(10)}}\delta y\, dw\right]_{v_0}^{v_1} + \left[\int_{w_0}^{w_1}\frac{\partial F}{\partial z^{(10)}}\delta z\, dw\right]_{v_0}^{v_1}.
\end{cases}
$$

Nun ist aber leicht zu sehen, dass

$$
\frac{\partial F}{\partial x} = D\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial F}{\partial y} = D\frac{\partial f}{\partial y},\quad \frac{\partial F}{\partial z} = D\frac{\partial f}{\partial z},
$$

$$
\frac{\partial F}{\partial x^{(10)}} = f y^{(01)} + \left(y^{(01)}\frac{\partial f}{\partial p} - x^{(01)}\frac{\partial f}{\partial q}\right)\frac{y^{(10)}z^{(01)} - y^{(01)}z^{(10)}}{D},
$$

$$
\frac{\partial F}{\partial x^{(01)}} = -f y^{(10)} + \left(-y^{(10)}\frac{\partial f}{\partial p} + x^{(10)}\frac{\partial f}{\partial q}\right)\frac{y^{(10)}z^{(01)} - y^{(01)}z^{(10)}}{D},
$$

$$
\frac{\partial F}{\partial y^{(10)}} = -f x^{(01)} + \left(-y^{(01)}\frac{\partial f}{\partial p} + x^{(01)}\frac{\partial f}{\partial q}\right)\frac{x^{(10)}z^{(01)} - x^{(01)}z^{(10)}}{D},
$$

$$
\frac{\partial F}{\partial y^{(01)}} = f x^{(10)} + \left(y^{(10)}\frac{\partial f}{\partial p} - x^{(10)}\frac{\partial f}{\partial q}\right)\frac{x^{(10)}z^{(01)} - x^{(01)}z^{(10)}}{D},
$$

$$
\frac{\partial F}{\partial z^{(10)}} = y^{(01)}\frac{\partial f}{\partial p} - x^{(01)}\frac{\partial f}{\partial q},\quad \frac{\partial F}{\partial z^{(01)}} = -y^{(10)}\frac{\partial f}{\partial p} + x^{(10)}\frac{\partial f}{\partial q},
$$

und daraus vermöge einer einfachen Rechnung

$$
\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dv}\frac{\partial F}{\partial x^{(10)}} - \frac{d}{dw}\frac{\partial F}{\partial x^{(01)}} = \left(y^{(10)}z^{(01)} - y^{(01)}z^{(10)}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial q}\right),
$$

$$
\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dv}\frac{\partial F}{\partial y^{(10)}} - \frac{d}{dw}\frac{\partial F}{\partial y^{(01)}} = \left(x^{(10)}z^{(10)} - x^{(10)}z^{(01)}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial q}\right),
$$

$$
\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dv}\frac{\partial F}{\partial z^{(10)}} - \frac{d}{dw}\frac{\partial F}{\partial z^{(01)}} = \left(x^{(10)}y^{(01)} - x^{(01)}y^{(10)}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial q}\right),
$$

so dass die Summe der drei ersten Doppelintegrale der rechten Seite der Gleichung (5.) in

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\left(\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial q}\right)(\delta z-p\,\delta x-q\,\delta y)\,dy\,dx$$

übergeht. Ebenso einfach folgt, dass

$$\int_{u_0}^{u_1}\Big[\Big(\frac{\partial F}{\partial x^{(01)}}-\frac{\partial F}{\partial x^{(10)}}\frac{dw}{dv}\Big)\delta x+\Big(\frac{\partial F}{\partial y^{(01)}}-\frac{\partial F}{\partial y^{(10)}}\frac{dw}{dv}\Big)\delta y + \Big(\frac{\partial F}{\partial z^{(01)}}-\frac{\partial F}{\partial z^{(10)}}\frac{dw}{dv}\Big)\delta z\Big]_{w_0}^{w_1}\,dv$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}\Big[\Big(\frac{\partial f}{\partial q}-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dy}{dx}\Big)(\delta z-p\,\delta x-q\,\delta y)\Big]_{y_0}^{y_1}\,dx+\int_{x_0}^{x_1}\Big[f(\delta y-y'\,\delta x)\Big]_{y_0}^{y_1}\,dx$$

und

$$\Big[\int_{w_0}^{w_1}\frac{\partial F}{\partial x^{(10)}}\,\delta x\,dw\Big]_{v_0}^{v_1}+\Big[\int_{w_0}^{w_1}\frac{\partial F}{\partial y^{(10)}}\,\delta y\,dw\Big]_{v_0}^{v_1}+\Big[\int_{w_0}^{w_1}\frac{\partial F}{\partial z^{(10)}}\,\delta z\,dw\Big]_{v_0}^{v_1}$$

$$=\Big[\int_{y_0}^{y_1}f(\delta x-x'\,\delta y)\,dy\Big]_{x_0}^{x_1}+\Big[\int_{y_0}^{y_1}\Big(\frac{\partial f}{\partial p}-x'\frac{\partial f}{\partial q}\Big)(\delta z-p\,\delta x-q\,\delta y)\,dy\Big]_{x_0}^{x_1}$$

ist, wenn $\frac{dx}{dy}=x'$ an der Begrenzung gesetzt wird, und es ergiebt sich somit durch Zusammensetzung dieser Transformationen

$$(6.)\quad\left\{\begin{aligned}&\delta\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}f(x,y,z,p,q)\,dy\,dx\\&\quad=\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\Big(\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial q}\Big)(\delta z-p\,\delta x-q\,\delta y)\,dy\,dx\\&+\int_{x_0}^{x_1}\Big[f(\delta y-y'\,\delta x)\Big]_{y_0}^{y_1}\,dx+\Big[\int_{y_0}^{y_1}f(\delta x-x'\,\delta y)\,dy\Big]_{x_0}^{x_1}\\&\qquad+\int_{x_0}^{x_1}\Big[\Big(\frac{\partial f}{\partial q}-y'\,\frac{\partial f}{\partial p}\Big)(\delta z-p\,\delta x-q\,\delta y)\Big]_{y_0}^{y_1}\,dx\\&\qquad+\Big[\int_{y_0}^{y_1}\Big(\frac{\partial f}{\partial p}-x'\,\frac{\partial f}{\partial q}\Big)(\delta z-p\,\delta x-q\,\delta y)\,dy\Big]_{x_0}^{x_1}.\end{aligned}\right.$$

Die Gestalt der Variation des Doppelintegrales für den Fall, dass mehr als *eine* abhängige Variable in der Function unter dem Integrale vorkommt, ist unmittelbar ersichtlich.

Seien nun die erweiterten *Lagrange*schen Gleichungen gegeben

$$\frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}} = P_s \qquad (s=1,2,\ldots,\mu) \tag{7.}$$

und werde

$$H - \sum_1^\mu{}_\varrho\, p_\varrho^{(10)}\frac{\partial H}{\partial p_\varrho^{(10)}} - \sum_1^\mu{}_\varrho\, p_\varrho^{(01)}\frac{\partial H}{\partial p_\varrho^{(01)}} = E \tag{8.}$$

gesetzt, so erhält man unter der Voraussetzung, dass auch die unabhängigen Variabeln t und u selbst variiren sollen — eine Voraussetzung, die unter der nachher zu machenden Annahme der Gültigkeit des Energieprincips aus bekannten Gründen nothwendig ist — vermöge der Beziehung (6.):

$$\begin{cases} \delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} H\,du\,dt \\ = \int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} \sum_1^\mu{}_s \left(\frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}}\right)(\delta p_s - p_s^{(10)}\delta t - p_s^{(01)}\delta u)\,du\,dt \\ \quad + \int_{t_0}^{t_1}\Big[H(\delta u - u'\delta t)\Big]_{u_0}^{u_1} dt + \Big[\int_{u_0}^{u_1} H(\delta t - t'\delta u)\,du\Big]_{t_0}^{t_1} \\ \quad + \int_{t_0}^{t_1}\Big[\sum_1^\mu{}_s \left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}} - \frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}}\frac{du}{dt}\right)(\delta p_s - p_s^{(10)}\delta t - p_s^{(01)}\delta u)\Big]_{u_0}^{u_1} dt \\ \quad + \Big[\int_{u_0}^{u_1} \sum_1^\mu{}_s \left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}} - \frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}}\frac{dt}{du}\right)(\delta p_s - p_s^{(10)}\delta t - p_s^{(01)}\delta u)\,du\Big]_{t_0}^{t_1} \end{cases} \tag{9.}$$

oder nach (8.)

$$\begin{cases} \delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} H\,du\,dt \\ = \int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} \sum_1^\mu{}_s \left(\frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}}\right)(\delta p_s - p_s^{(10)}\delta t - p_s^{(01)}\delta u)\,du\,dt \\ \quad + \int_{t_0}^{t_1}\Big[E(\delta u - u'\delta t)\Big]_{u_0}^{u_1} dt + \Big[\int_{u_0}^{u_1} E(\delta t - t'\delta u)\,du\Big]_{t_0}^{t_1} \\ \quad - \int_{t_0}^{t_1}\Big[\sum_1^\mu{}_s \left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}}\delta t - \frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}}\delta u\right)(p_s^{(10)} + p_s^{(01)}u')\Big]_{u_0}^{u_1} dt \\ \quad + \Big[\int_{u_0}^{u_1} \sum_1^\mu{}_s \left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}}\delta t - \frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}}\delta u\right)(p_s^{(01)} + p_s^{(10)}t')\,du\Big]_{t_0}^{t_1} \\ \quad + \int_{t_0}^{t_1}\Big[\sum_1^\mu{}_s \left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}} - \frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}}u'\right)\delta p_s\Big]_{u_0}^{u_1} dt \\ \quad + \Big[\int_{u_0}^{u_1} \sum_1^\mu{}_s \left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}} - \frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}}t'\right)\delta p_s\,du\Big]_{t_0}^{t_1}. \end{cases} \tag{10.}$$

Bildet man nun, indem man die unabhängigen Variabeln t und u als Functionen von zwei Grössen ξ und η auffasst, welche an den Grenzen des dem (t, u)-Gebiete entsprechenden (ξ, η)-Gebietes nicht variiren, und

$$t^{(10)} u^{(01)} - t^{(01)} u^{(10)} = D$$

setzt,

$$(11.)\quad \left\{\begin{aligned} &\delta \int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} E\,du\,dt = \delta \int_{\xi_0}^{\xi_1}\int_{\eta_0}^{\eta_1} E\,D\,d\eta\,d\xi \\ &= \int_{\xi_0}^{\xi_1}\int_{\eta_0}^{\eta_1} D\,\delta E\,d\eta\,d\xi + \int_{\xi_0}^{\xi_1}\int_{\eta_0}^{\eta_1} E\,\delta D\,d\eta\,d\xi = \int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1} \delta E\,du\,dt \\ &\quad + \int_{\xi_0}^{\xi_1}\int_{\eta_0}^{\eta_1} E\left(\frac{\partial D}{\partial t^{(01)}}\,\delta t^{(01)} + \frac{\partial D}{\partial u^{(01)}}\,\delta u^{(01)}\right) d\eta\,d\xi \\ &\quad + \int_{\xi_0}^{\xi_1}\int_{\eta_0}^{\eta_1} E\left(\frac{\partial D}{\partial t^{(10)}}\,\delta t^{(10)} + \frac{\partial D}{\partial u^{(01)}}\,\delta u^{(10)}\right) d\eta\,d\xi, \end{aligned}\right.$$

worin unter der Voraussetzung, dass das kinetische Potential den oben erwähnten nothwendigen und hinreichenden Bedingungen genügt, und unter der Annahme, dass äussere Kräfte nicht vorhanden sind,

$$E = H - \sum_1^\mu{}_\varrho\, p_\varrho^{(10)} \frac{\partial H}{\partial p_\varrho^{(10)}} - \sum_1^\mu{}_\varrho\, p_\varrho^{(01)} \frac{\partial H}{\partial p_\varrho^{(10)}} = h$$

das Princip der Energie ausdrückt.

Nun folgt aber aus

$$\int_{\eta_0}^{\eta_1} \frac{\partial D}{\partial t^{(01)}}\,\frac{d\delta t}{d\eta}\,d\eta = \left[\frac{\partial D}{\partial t^{(01)}}\,\delta t\right]_{\eta_0}^{\eta_1} - \int_{\eta_0}^{\eta_1} \frac{d}{d\eta}\,\frac{\partial D}{\partial t^{(01)}}\,\delta t\,d\eta\ ,$$

$$\int_{\eta_0}^{\eta_1} \frac{\partial D}{\partial u^{(01)}}\,\frac{d\delta u}{d\eta}\,d\eta = \left[\frac{\partial D}{\partial u^{(01)}}\,\delta u\right]_{\eta_0}^{\eta_1} - \int_{\eta_0}^{\eta_1} \frac{d}{d\eta}\,\frac{\partial D}{\partial u^{(01)}}\,\delta u\,d\eta,$$

dass

$$(12.)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{\xi_0}^{\xi_1}\int_{\eta_0}^{\eta_1} \left(\frac{\partial D}{\partial t^{(01)}}\,\delta t^{(01)} + \frac{\partial D}{\partial u^{(01)}}\,\delta u^{(01)}\right) d\eta\,d\xi \\ &= \int_{\xi_0}^{\xi_1} \left[-u^{(10)}\delta t + t^{(10)}\delta u\right]_{\eta_0}^{\eta_1} d\xi - \int_{\xi_0}^{\xi_1}\int_{\eta_0}^{\eta_1} (-u^{(11)}\delta t + t^{(11)}\delta u)\,d\eta\,d\xi \end{aligned}\right.$$

ist, ferner aus

$$\frac{d}{d\xi}\int_{\eta_0}^{\eta_1} \frac{\partial D}{\partial t^{(10)}}\,\delta t\,d\eta = \int_{\eta_0}^{\eta_1} \left(\delta t\,\frac{d}{d\xi}\,\frac{\partial D}{\partial t^{(10)}} + \frac{\partial D}{\partial t^{(10)}}\,\frac{d\delta t}{d\xi}\right) d\eta + \left[\frac{\partial D}{\partial t^{(10)}}\,\delta t\,\frac{d\eta}{d\xi}\right]_{\eta_0}^{\eta_1}$$

und der entsprechenden für die Variable u die Beziehung

$$(13.)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{\xi_0}^{\xi_1}\int_{\eta_0}^{\eta_1}\Big(\frac{\partial D}{\partial t^{(10)}}\delta t^{(10)}+\frac{\partial D}{\partial u^{(10)}}\delta u^{(10)}\Big)\,d\eta\,d\xi \\ &\qquad\qquad =-\int_{\xi_0}^{\xi_1}\int_{\eta_0}^{\eta_1}(u^{(11)}\delta t-t^{(11)}\delta u)\,d\eta\,d\xi \\ &+\Big[\int_{\eta_0}^{\eta_1}(u^{(01)}\delta t-t^{(01)}\delta u)\,d\eta\Big]_{\xi_0}^{\xi_1} \\ &\qquad\qquad -\int_{\xi_0}^{\xi_1}\Big[\Big(u^{(01)}\delta t-t^{(01)}\delta u\Big)\frac{d\eta}{d\xi}\Big]_{\eta_0}^{\eta_1}d\xi, \end{aligned}\right.$$

und es geht somit vermöge (12.) und (13.) die Gleichung (11.) in

$$(14.)\quad \left\{\begin{aligned} &\delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1}E\,du\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1}\delta E\,du\,dt \\ &+h\Big\{\Big[\int_{\eta_0}^{\eta_1}(u^{(01)}\delta t-t^{(01)}\delta u)\,d\eta\Big]_{\xi_0}^{\xi_1}-\int_{\xi_0}^{\xi_1}\Big[(u^{(11)}\delta t-t^{(11)}\delta u)\frac{d\eta}{d\xi} \\ &\qquad +(u^{(10)}\delta t-t^{(10)}\delta u)\Big]_{\eta_0}^{\eta_1}d\xi\Big\}=\int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1}\delta E\,du\,dt \\ &+h\Big\{\Big[\int_{u_0}^{u_1}(-t'\delta u+\delta t)\,du\Big]_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}\Big[(\delta u-u'\delta t)\Big]_{u_0}^{u_1}dt\Big\} \end{aligned}\right.$$

über. *Durch Subtraction der Gleichung* (14.) *von* (10.) *erhält man somit*

$$(15.)\quad \left\{\begin{aligned} &\delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1}(H-E)\,du\,dt \\ &=\int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1}\sum_1^{\mu}{}_s\Big(\frac{\partial H}{\partial p_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}}-\frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}}\Big)(\delta p_s-p_s^{(10)}\delta t-p_s^{(01)}\delta u)\,du\,dt \\ &\qquad -\int_{t_0}^{t_1}\int_{u_0}^{u_1}\delta E\,du\,dt \\ &\quad -\int_{t_0}^{t_1}\Big[\sum_1^{\mu}{}_s\Big(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}}\delta t-\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}}\delta u\Big)\Big(p_s^{(10)}+p^{(01)}u'\Big)\Big]_{u_0}^{u_1}dt \\ &\quad +\Big[\int_{u_0}^{u_1}\sum_1^{\mu}{}_s\Big(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}}\delta t-\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}}\delta u\Big)\Big(p_s^{(01)}+p_s^{(10)}t'\Big)\,du\Big]_{t_0}^{t_1} \\ &\quad +\int_{t_0}^{t_1}\Big[\sum_1^{\mu}{}_s\Big(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}}-\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}}u'\Big)\delta p_s\Big]_{u_0}^{u_1}\delta t \\ &\quad +\Big[\int_{u_0}^{u_1}\sum_1^{\mu}{}_s\Big(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}}-\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}}t'\Big)\delta p_s\,du\Big]_{t_0}^{t_1}. \end{aligned}\right.$$

Sollen nun die Werthe von $p_1, \ldots, p_\mu$ den *Lagrange*schen Gleichungen (7.) für verschwindende äussere Kräfte*) Genüge leisten, und ausserdem ihre Variationen an den Grenzen des (t, u)-Gebietes verschwinden, *so geht das durch die Gleichung* (15.) *ausgedrückte Princip der kleinsten Wirkung in*

$$(16.) \qquad \delta \int_{t_0}^{t_1} \int_{u_0}^{u_1} (H-E)\, du\, dt = -\int_{t_0}^{t_1} \int_{u_0}^{u_1} \delta E\, du\, dt,$$

und bei der Annahme, dass die verglichenen Veränderungen ebenfalls dem Energieprincip, nur mit einer anderen Energieconstanten genügen, in

$$(17.) \quad \begin{cases} \delta \int_{t_0}^{t_1} \int_{u_0}^{u_1} (H-E)\, du\, dt \\ \qquad = -\delta h \int_{t_0}^{t_1} \int_{u_0}^{u_1} du\, dt = -\delta h \int_{t_0}^{t_1} (u_1 - u_0)\, dt \end{cases}$$

über; setzt man endlich noch fest, dass die Constante der Energie für die normale und die verglichenen Veränderungen dieselbe sein soll, also $\delta h = 0$, *so ergiebt sich das Princip der kleinsten Wirkung in seiner einfachsten Gestalt*

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \int_{u_0}^{u_1} (H-E)\, du\, dt = 0.$$

§ 5.

Das erweiterte Princip der Flächen.

Aus den *Lagrange*schen Gleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial p_\varkappa} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_\varkappa^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial p_\varkappa^{(01)}} = P_\varkappa,$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_\lambda} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_\lambda^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial p_\lambda^{(01)}} = P_\lambda$$

folgt durch Multiplication mit p_λ resp. $p_\varkappa$ und Subtraction

$$(1.) \quad \begin{cases} p_\lambda \frac{\partial H}{\partial p_\varkappa} - p_\varkappa \frac{\partial H}{\partial p_\lambda} - \left(p_\lambda \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_\varkappa^{(10)}} - p_\varkappa \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_\lambda^{(10)}}\right) \\ \qquad - \left(p_\lambda \frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial p_\varkappa^{(01)}} - p_\varkappa \frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial p_\lambda^{(01)}}\right) = p_\lambda P_\varkappa - p_\varkappa P_\lambda; \end{cases}$$

*) Die schon oben in der Gleichung (11.) gemachte Annahme, dass äussere Kräfte nicht vorhanden sind, geschah nur der Kürze der Darstellung wegen, da sonst nur die im § 9 meiner „Principien der Mechanik“ gegebene Deduction an die Stelle der oben durchgeführten tritt.

da aber

$$p_\lambda \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_\varkappa^{(10)}} - p_\varkappa \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_\lambda^{(10)}} = \frac{d}{dt}\left(p_\lambda \frac{\partial H}{\partial p_\varkappa^{(10)}} - p_\varkappa \frac{\partial H}{\partial p_\lambda^{(10)}}\right) - \left(p_\lambda^{(10)} \frac{\partial H}{\partial p_\varkappa^{(10)}} - p_\varkappa^{(10)} \frac{\partial H}{\partial p_\lambda^{(10)}}\right),$$

$$p_\lambda \frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial p_\varkappa^{(01)}} - p_\varkappa \frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial p_\lambda^{(01)}} = \frac{d}{du}\left(p_\lambda \frac{\partial H}{\partial p_\varkappa^{(01)}} - p_\varkappa \frac{\partial H}{\partial p_\lambda^{(01)}}\right) - \left(p_\lambda^{(01)} \frac{\partial H}{\partial p_\varkappa^{(01)}} - p_\varkappa^{(01)} \frac{\partial H}{\partial p_\lambda^{(01)}}\right),$$

so *folgt aus* (1.) *durch Summation über* $\varkappa$ *und* λ *von* 1 *bis* μ, *wenn* H *der Gleichung*

$$(2.)\quad \left\{ \sum_{1,2\ldots\mu}^{\varkappa,\lambda} \left\{\left(p_\lambda \frac{\partial H}{\partial p_\varkappa} - p_\varkappa \frac{\partial H}{\partial p_\lambda}\right) + \left(p_\lambda^{(10)} \frac{\partial H}{\partial p_\varkappa^{(10)}} - p_\varkappa^{(10)} \frac{\partial H}{\partial p_\lambda^{(10)}}\right) + \left(p_\lambda^{(01)} \frac{\partial H}{\partial p_\varkappa^{(01)}} - p_\varkappa^{(01)} \frac{\partial H}{\partial p_\lambda^{(01)}}\right)\right\} = 0 \right.$$

identisch genügt, also bekanntlich die Form hat

$$(3.)\quad \left\{ \begin{aligned} H = F\,(t, u, p_\varkappa^2 + p_\lambda^2, p_\varkappa^{(10)2} + p_\lambda^{(10)2}, p_\varkappa^{(01)2} + p_\lambda^{(01)2}, p_\varkappa\, p_\lambda + p_{\varkappa_1}\, p_{\lambda_1}, \\ p_\varkappa^{(10)}\, p_\lambda^{(10)} + p_{\varkappa_1}^{(10)}\, p_{\lambda_1}^{(10)}, p_\varkappa^{(01)}\, p_\lambda^{(01)} + p_{\varkappa_1}^{(01)}\, p_{\lambda_1}^{(01)}, p_\varkappa\, p_\varkappa^{(10)} + p_\lambda\, p_\lambda^{(10)}, \\ p_\varkappa\, p_\varkappa^{(01)} + p_\lambda\, p_\lambda^{(01)}, p_\varkappa^{(10)}\, p_\varkappa^{(01)} + p_\lambda^{(10)}\, p_\lambda^{(01)}), \end{aligned} \right.$$

und

$$(4.)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{1,2\ldots\mu}^{\varkappa,\lambda} \left(p_\lambda \frac{\partial H}{\partial p_\varkappa^{(10)}} - p_\varkappa \frac{\partial H}{\partial p_\lambda^{(10)}}\right) = K_1, \quad \sum_{1,2\ldots\mu}^{\varkappa,\lambda} \left(p_\lambda \frac{\partial H}{\partial p_\varkappa^{(01)}} - p_\varkappa \frac{\partial H}{\partial p_\lambda^{(01)}}\right) = K_2, \\ \sum_{1,2\ldots\mu}^{\varkappa,\lambda} (p_\lambda P_\varkappa - p_\varkappa P_\lambda) = K \end{aligned} \right.$$

gesetzt wird,

$$(5.)\qquad \frac{dK_1}{dt} + \frac{dK_2}{du} = K,$$

eine Gleichung, deren Integral dem Princip der Flächen in der Mechanik wägbarer Massen analog ist; ist für gewisse Formen des kinetischen Potentials, wie sie gleich näher bezeichnet werden sollen, $K_2 = \nu K_1$, *worin* ν *eine Constante bedeutet, und sind äussere Kräfte nicht vorhanden, so geht* (5.) *in*

$$(6.)\qquad \frac{dK_1}{dt} + \nu \frac{dK_1}{du} = 0$$

über, und es lautet somit das dem Princip der Flächen analoge Integral

$$(7.)\qquad \sum_{1,2\ldots\mu}^{\varkappa,\lambda} \left(p_\lambda \frac{\partial H}{\partial p_\varkappa^{(10)}} - p_\varkappa \frac{\partial H}{\partial p_\lambda^{(10)}}\right) = \varphi\,(u - \nu t),$$

worin φ *eine willkürliche Function bedeutet.*

Legen wir z. B. den oben behandelten, dem freien Systeme in der Mechanik wägbarer Massen entsprechenden Fall zu Grunde, in welchem das kinetische Potential H in den Grössen $p_1^{(10)}$, $p_1^{(01)}$, $p_2^{(10)}$, $p_2^{(01)}$ homogen vom zweiten Grade ist mit constanten Coefficienten, und für den das Energieprincip statt hatte, also H die Form besass

$$H = A\,(\alpha p_1^{(10)} + \beta p_1^{(01)})^2 + B\,(\alpha p_2^{(10)} + \beta p_2^{(01)})^2 + C\,(\alpha p_1^{(10)} + \beta p_1^{(01)})\,(\alpha p_2^{(10)} + \beta p_2^{(01)}) + f(p_1, p_2),$$

so wird, wenn H ausserdem die Gestalt von (3.) *haben soll, dasselbe übergehen in*

$$(8.) \qquad H = (\alpha p_1^{(10)} + \beta p_1^{(01)})^2 + (\alpha p_2^{(10)} + \beta p_2^{(01)})^2 + F(p_1^2 + p_2^2),$$

und da

$$K_1 = 2\,p_2\,(\alpha p_1^{(10)} + \beta p_1^{(01)})\,\alpha - 2\,p_1\,(\alpha p_2^{(10)} + \beta p_2^{(01)})\,\alpha,$$

$$K_2 = 2\,p_2\,(\alpha p_1^{(10)} + \beta p_1^{(01)})\,\beta - 2\,p_1\,(\alpha p_2^{(10)} + \beta p_2^{(01)})\,\beta$$

also

$$K_2 = \frac{\beta}{\alpha}\,K_1$$

ist, *das Flächenprincip nach* (7.) *die Form annehmen*

$$(9.) \qquad p_2 \frac{\partial H}{\partial p_1^{(10)}} - p_1 \frac{\partial H}{\partial p_2^{(10)}} = \varphi\,(u - \frac{\beta}{\alpha}\,t),$$

oder

$$\alpha\,(p_2\,p_1^{(10)} - p_1\,p_2^{(10)}) + \beta\,(p_2 p_1^{(01)} - p_1\,p_2^{(01)}) = \frac{1}{2\,\alpha}\,\varphi\,(u - \frac{\beta}{\alpha}\,t),$$

worin φ eine willkürliche Function bedeutet.

§ 6.

Das erweiterte Princip von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts.

Unter der Voraussetzung, dass, wenn die Zwangsbedingungen des Problems in endlicher Form gegeben sind, diese nur von den Differenzen der Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ abhängen sollen, also

$$\delta x_1 = \delta x_2 = \ldots = \delta x_n = p,$$

worin p eine willkürliche Grösse bedeutet, als virtuelle Veränderungen betrachtet werden dürfen oder dass in den *Lagrange*schen Gleichungen der ersten Form nach den Gleichungen (3.) des § 2

$$\sum_1^n{}_i f_{1i} = 0, \sum_1^n{}_i f_{2i} = 0, \ldots \sum_1^n{}_i f_{mi} = 0$$

ist, gehen die Gleichungen (2.) des § 2 in

$$(1.) \qquad \sum_1^n{}_i \left\{ \frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x_i^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial x_i^{(01)}} \right\} = X_i$$

über.

Sei nun H_1 eine beliebige Function von $t, u, \xi, \xi^{(10)}, \xi^{(01)}$, worin ξ zunächst noch eine willkürliche Function von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sein soll, so folgt aus dem Hülfsatz 2., dass

$$\frac{\partial H_1}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H_1}{\partial x_i^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial H_1}{\partial x_i^{(01)}} = \left(\frac{\partial H_1}{\partial \xi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H_1}{\partial \xi^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial H_1}{\partial \xi^{(01)}} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x_i},$$

und somit

$$(2.) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_1^n{}_i \frac{\partial H_1}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \sum_1^n{}_i \frac{\partial H_1}{\partial x_i^{(10)}} - \frac{d}{du} \sum_1^n{}_i \frac{\partial H_1}{\partial x_i^{(01)}} \\ &\qquad = \left(\frac{\partial H_1}{\partial \xi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H_1}{\partial \xi^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial H_1}{\partial \xi^{(01)}} \right) \sum_1^n{}_i \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \end{aligned} \right.$$

ist, so dass sich, wenn ξ der Bedingung unterworfen wird, dass

$$\sum_1^n{}_i \frac{\partial \xi}{\partial x_i} = 1,$$

also

$$(3.) \qquad \xi = x_\lambda + \omega\,(t, u, x_1 - x_\lambda, x_2 - x_\lambda, \ldots, x_n - x_\lambda)$$

ist, worin λ irgend einen der Indices $1, 2, \ldots, n$ und ω eine willkürliche Function bedeutet, aus (2.) die Beziehung ergiebt

$$(4.) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial H_1}{\partial \xi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H_1}{\partial \xi^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial H_1}{\partial \xi^{(01)}} \\ &\qquad = \sum_1^n{}_i \frac{\partial H_1}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \sum_1^n{}_i \frac{\partial H_1}{\partial x_i^{(10)}} - \frac{d}{du} \sum_1^n{}_i \frac{\partial H_1}{\partial x_i^{(01)}}. \end{aligned} \right.$$

Ist nun das kinetische Potential H von der Form

$$(5.) \quad \left\{ \begin{aligned} H = H_2 &\left(t, u, x_\lambda + \omega\,(t, u, x_1 - x_\lambda, x_2 - x_\lambda, \ldots, x_n - x_\lambda), x_\lambda^{(10)} + \frac{d\omega}{dt}, x_\lambda^{(01)} + \frac{d\omega}{du} \right) \\ &+ H_3 \left(t, u, x_r - x_s, x_r^{(10)} - x_s^{(10)}, x_r^{(01)} - x_s^{(01)} \right), \end{aligned} \right.$$

worin $x_r - x_s$ alle Werthecombinationen der Differenzen der Grössen

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

darstellen soll, und H_2 und H_3 willkürliche Functionen ihrer Argumente sind, so wird einerseits nach (4.)

$$(6.)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial H_2}{\partial \xi} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial H_2}{\partial \xi^{(10)}} - \dfrac{d}{du}\dfrac{\partial H_2}{\partial \xi^{(01)}} \\ \qquad = \sum_1^n{}_i \dfrac{\partial H_2}{\partial x_i} - \dfrac{d}{dt}\sum_1^n{}_i \dfrac{\partial H_2}{\partial x_i^{(10)}} - \dfrac{d}{du}\sum_1^n{}_i \dfrac{\partial H_2}{\partial x_i^{(01)}}, \end{array}\right.$$

andererseits, weil bekanntlich

$$\sum_1^n{}_i \frac{\partial H_3}{\partial x_i} = 0, \quad \sum_1^n{}_i \frac{\partial H_3}{\partial x_i^{(10)}} = 0, \quad \sum_1^n{}_i \frac{\partial H_3}{\partial x_i^{(01)}} = 0$$

ist,

$$(7.)\quad \sum_1^n{}_i \frac{\partial H_3}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\sum_1^n{}_i \frac{\partial H_3}{\partial x_i^{(10)}} - \frac{d}{du}\sum_1^n{}_i \frac{\partial H_3}{\partial x_i^{(01)}} = 0$$

sein, so dass sich durch Addition der Gleichungen (6.) und (7.)

$$(8.)\quad \left\{\begin{array}{l} \sum_1^n{}_i \dfrac{\partial H}{\partial x_i} - \dfrac{d}{dt}\sum_1^n{}_i \dfrac{\partial H}{\partial x_i^{(10)}} - \dfrac{d}{du}\sum_1^n{}_i \dfrac{\partial H}{\partial x_i^{(01)}} \\ \qquad = \dfrac{\partial H_2}{\partial \xi} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial H_2}{\partial \xi^{(10)}} - \dfrac{d}{du}\dfrac{\partial H_2}{\partial \xi^{(01)}} \end{array}\right.$$

ergiebt, und somit nach (1.)

$$(9.)\quad \frac{\partial H_2}{\partial \xi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H_2}{\partial \xi^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial H_2}{\partial \xi^{(01)}} = \sum_1^n{}_i X_i$$

folgt. *Die in dieser Gleichung ausgesprochene Beziehung, worin H_2 und ξ durch die Gleichungen* (5.) *und* (3.) *bestimmt sind, soll das erweiterte Princip von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes darstellen.*

Setzt man den früher getroffenenen, denen der Mechanik wägbarer Massen analogen Bestimmungen gemäss

$$T = \sum_1^n{}_i a_i \left(\alpha x_i^{(10)} + \beta x_i^{(01)}\right)^2$$

oder, wenn $\sum_1^n{}_i a_i = A$ ist,

$$T = \frac{1}{A}\left\{a_1\left(\alpha x_1^{(10)} + \beta x_1^{(01)}\right) + a_2\left(\alpha x_2^{(10)} + \beta x_2^{(01)}\right) + \cdots + a_n\left(\alpha x_n^{(10)} + \beta x_n^{(01)}\right)\right\}^2$$
$$+ \sum_{1,2\ldots n}{}_{i,\varkappa} \frac{a_i a_\varkappa}{A}\left\{\left(\alpha x_i^{(10)} + \beta x_i^{(01)}\right) - \left(\alpha x_\varkappa^{(10)} + \beta x_\varkappa^{(01)}\right)\right\}^2,$$

so wird, weil T in die Form gesetzt werden kann

$$(10).\quad \left\{\begin{aligned} T &= A\Big\{\alpha x_1^{(10)}+\beta x_1^{(01)}+\frac{a_2}{A}\Big[(\alpha x_2^{(10)}+\beta x_2^{(01)})-(\alpha x_1^{(10)}+\beta x_1^{(01)})\Big] \\ &\qquad +\cdots+\frac{a_n}{A}\Big[(\alpha x_n^{(10)}+\beta x_n^{(01)})-(\alpha x_1^{(10)}+\beta x_1^{(01)})\Big]\Big\}^2 \\ &\quad +\sum_{1,2,\ldots n}{}_{i,\varkappa}\frac{a_i a_\varkappa}{A}\Big\{(\alpha x_i^{(10)}+\beta x_i^{(01)})-(\alpha x_\varkappa^{(10)}+\beta x_\varkappa^{(01)})\Big\}^2 \\ &= A\Big\{\alpha x_1^{(10)}+\frac{a_2}{A}\,\alpha\,(x_2^{(10)}-x_1^{(10)}) \\ &\qquad +\cdots+\frac{a_n}{A}\,\alpha\,(x_n^{(10)}-x_1^{(10)})+\beta x_1^{(01)}+\frac{a_2}{A}\,\beta\,(x_2^{(01)}-x_1^{(01)}) \\ &\qquad\qquad +\cdots+\frac{a_n}{A}\,\beta\,(x_n^{(01)}-x_1^{(01)})\Big\}^2 \\ &\quad +\sum_{1,2,\ldots,n}{}_{i,\varkappa}\frac{a_i a_\varkappa}{A}\Big\{(\alpha x_i^{(10)}+\beta x_i^{(01)})-(\alpha x_\varkappa^{(10)}+\beta x_\varkappa^{(01)})\Big\}^2, \end{aligned}\right.$$

wenn

$$H=-T-U$$

ist, und U nur von den Differenzen

$$x_i-x_\varkappa,\qquad x_i^{(10)}-x_\varkappa^{(10)},\qquad x_i^{(01)}-x_\varkappa^{(01)}$$

abhängt, der erste Theil von T in (10.) dem obigen H_2, der zweite Theil nebst U dem H_3 entsprechen, ***und es wird somit das erweiterte Schwerpunktsprincip die Form haben***

$$\frac{\partial H_2}{\partial \xi}-\frac{d}{dt}\frac{\partial H_2}{\partial \xi^{(10)}}-\frac{d}{du}\frac{\partial H_2}{\partial \xi^{(01)}}=\sum_1^n{}_i X_i,$$

wenn

$$H_2=\frac{1}{A}(\alpha\xi^{(10)}+\beta\xi^{(01)})^2,\qquad A=\sum_1^n{}_i a_i$$

und

$$\xi=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$$

ist.

§ 7.

Transformation der erweiterten *Lagrange*schen Gleichungen in das erweiterte *Hamilton*sche Differentialgleichungssystem.

Um unter der Voraussetzung, dass äussere Kräfte nicht vorhanden, in die erweiterten *Lagrange*schen Gleichungen

$$(1.)\qquad \frac{\partial H}{\partial p_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10)}}-\frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01)}}=0 \qquad (s=1,2,\ldots\mu)$$

statt des kinetischen Potentials H, in welchem t und u nicht explicite vorkommen sollen, die durch den Ausdruck

$$(2.) \qquad E = H - \sum_1^\mu{}_\varrho \, p_\varrho^{(10)} \frac{\partial H}{\partial p_\varrho^{(10)}} - \sum_1^\mu{}_\varrho \, p_\varrho^{(01)} \frac{\partial H}{\partial p_\varrho^{(01)}}$$

definirte Energie einzuführen, setze man

$$(3.) \qquad \frac{\partial H}{\partial p_\varrho^{(10)}} = q_\varrho^{(10)}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_\varrho^{(01)}} = q_\varrho^{(01)} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, \mu)$$

und drücke aus diesen 2μ Gleichungen die 2μ Grössen

$$p_1^{(10)}, \; p_2^{(10)}, \ldots, \; p_\mu^{(10)}, \; p_1^{(01)}, \; p_2^{(01)}, \ldots, \; p_\mu^{(01)}$$

durch

$$p_1, \; p_2, \ldots, \; p_\mu, \; q_1^{(10)}, \; q_2^{(10)}, \ldots, \; q_\mu^{(10)}, \; q_1^{(01)}, \; q_2^{(01)}, \ldots, \; q_\mu^{(01)}$$

aus. Bezeichnet man die Werthe $H, E, p_\varrho^{(10)}, p_\varrho^{(01)}$, in welche diese Grössen nach Substitution jener Ausdrücke übergehen, mit (H), (E), $(p_\varrho^{(10)})$, $(p_\varrho^{(01)})$, so wird sich aus der Gleichung (2.) die Beziehung

$$(4.) \qquad (E) = (H) - \sum_1^\mu{}_\varrho \, (p_\varrho^{(10)}) \, q_\varrho^{(10)} - \sum_1^\mu{}_\varrho \, (p_\varrho^{(01)}) \, q_\varrho^{(01)}$$

und hieraus durch Differentiation nach p_s

$$(5.) \qquad \frac{\partial (E)}{\partial p_s} = \frac{\partial (H)}{\partial p_s} - \sum_1^\mu{}_\varrho \, \frac{\partial (p_\varrho^{(10)})}{\partial p_s} \, q_\varrho^{(10)} - \sum_1^\mu{}_\varrho \, \frac{\partial (p_\varrho^{(01)})}{\partial p_s} \, q_\varrho^{(01)}$$

ergeben. Da aber

$$\frac{\partial (H)}{\partial p_s} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_s}\right) + \sum_1^\mu{}_\varrho \left(\frac{\partial H}{\partial p_\varrho^{(10)}}\right) \frac{\partial (p_\varrho^{(10)})}{\partial p_s} + \sum_1^\mu{}_\varrho \left(\frac{\partial H}{\partial p_\varrho^{(01)}}\right) \frac{\partial (p_\varrho^{(01)})}{\partial p_s}$$

$$= \left(\frac{\partial H}{\partial p_s}\right) + \sum_1^\mu{}_\varrho \, q_\varrho^{(10)} \, \frac{\partial (p_\varrho^{(10)})}{\partial p_s} + \sum_1^\mu{}_\varrho \, q_\varrho^{(01)} \, \frac{d (p_\varrho^{(01)})}{\partial p_s}$$

ist, so geht die Gleichung (5.) in

$$(6.) \qquad \frac{\partial (E)}{\partial p_s} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_s}\right)$$

und somit (1.) in

$$(7.) \qquad \frac{\partial q_s^{(10)}}{\partial t} + \frac{\partial q_s^{(01)}}{\partial u} = \frac{\partial (E)}{\partial p_s}$$

über.

Da sich ferner aus der Gleichung (4.)

$$\frac{\partial (E)}{\partial q_s^{(10)}} = \frac{\partial (H)}{\partial q_s^{(10)}} - (p_s^{(10)}) - \sum_1^\mu{}_\varrho \, \frac{\partial (p_\varrho^{(10)})}{\partial q_s^{(10)}} \, q_\varrho^{(10)} - \sum_1^\mu{}_\varrho \, \frac{\partial (p_\varrho^{(01)})}{\partial q_s^{(01)}} \, q_\varrho^{(01)}$$

und

$$\frac{\partial(H)}{\partial q_s^{(10)}} = \sum_1^\mu{}_\varrho \left(\frac{\partial H}{\partial p_\varrho^{(10)}}\right) \frac{\partial(p_\varrho^{(10)})}{\partial q_s^{(10)}} + \sum_1^\mu{}_\varrho \left(\frac{\partial H}{\partial p_\varrho^{(01)}}\right) \frac{\partial(p_\varrho^{(01)})}{\partial q_s^{(10)}}$$

ergiebt, so folgt

$$\frac{\partial(E)}{\partial q_s^{(10)}} = -\, p_s^{(10)}$$

oder

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = -\,\frac{\partial(E)}{\partial q_s^{(10)}}. \tag{8.}$$

Endlich liefert die Gleichung (4.) die Beziehung

$$\frac{\partial(E)}{\partial q_s^{(01)}} = \frac{\partial(H)}{\partial q_s^{(01)}} - \sum_1^\mu{}_\varrho \left(\frac{\partial(p_\varrho^{(10)})}{\partial q_s^{(01)}}\right) q_\varrho^{(10)} - (p_s^{(01)}) - \sum_1^\mu{}_\varrho \frac{\partial(p_\varrho^{(01)})}{\partial q_s^{(01)}}\, q_\varrho^{(01)},$$

welche, weil

$$\frac{\partial(H)}{\partial q_s^{(01)}} = \sum_1^\mu{}_\varrho \left(\frac{\partial H}{\partial p_\varrho^{(10)}}\right) \frac{\partial(p_\varrho^{(10)})}{\partial q_s^{(01)}} + \sum_1^\mu{}_\varrho \left(\frac{\partial H}{\partial p_\varrho^{(01)}}\right) \frac{\partial(p_\varrho^{(01)})}{\partial q_s^{(01)}}$$

ist, in

$$\frac{\partial(E)}{\partial q_s^{(01)}} = -\, p_s^{(01)}$$

oder in

$$\frac{\partial p_s}{\partial u} = -\,\frac{\partial(E)}{\partial q_s^{(01)}} \tag{9.}$$

übergeht, und *wir erhalten somit statt der μ partiellen Lagrangeschen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in den abhängigen Variabeln $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ das simultane System von 3μ partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in den 3μ abhängigen Variabeln $q_1^{(10)}, \ldots, q_\mu^{(10)}, q_1^{(01)}, \ldots, q_\mu^{(01)}, p_1, \ldots, p_\mu$:*

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial p_s}{\partial t} = -\,\dfrac{\partial(E)}{\partial q_s^{(10)}}, & \dfrac{\partial p_s}{\partial u} = -\,\dfrac{\partial(E)}{\partial q_s^{(01)}}, \\ \dfrac{\partial q_s^{(10)}}{\partial t} + \dfrac{\partial q_s^{(01)}}{\partial u} = \dfrac{\partial(E)}{\partial p_s}, & \end{array}\right. \qquad (s = 1, 2, \ldots, \mu) \tag{10.}$$

welches das Analogon zu dem Hamiltonschen totalen Differentialgleichungssystem der Mechanik bildet.

§ 8.

Ueber die auf die erweiterte *Lagrange*sche Form reducirbaren partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Wenn man die partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$(1.) \qquad F(t, u, p, p^{(10)}, p^{(01)}, p^{(20)}, p^{(11)}, p^{(02)}) = 0$$

in *einer* abhängigen Variabeln p und zwei unabhängigen Variabeln t und u aufstellen will, welche sich in die Form der erweiterten *Lagrange*schen Gleichungen

$$(2.) \qquad \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p^{(10)}} - \frac{d}{du}\frac{\partial H}{\partial p^{(01)}} = 0$$

bringen lassen, so wird nur die Frage zu beantworten sein, wann die Function F ein kinetisches Potential besitzt, und es folgt somit aus den Gleichungen (90.) und (91.) des Hülfsatzes 4., dass F in $p^{(20)}, p^{(11)}, p^{(02)}$ linear, also die gesuchte Differentialgleichung von der Form sein muss

$$(3.) \quad \begin{cases} f_{20}(t, u, p, p^{(10)}, p^{(01)})\, p^{(20)} + f_{11}(t, u, p, p^{(10)}, p^{(01)})\, p^{(11)} \\ \qquad + f_{02}(t, u, p, p^{(10)}, p^{(01)})\, p^{(02)} + f(t, u, p, p^{(10)}, p^{(01)}) = 0, \end{cases}$$

worin die Coefficienten den Gleichungen (91.) gemäss den identisch zu erfüllenden Bedingungen unterliegen

$$2\frac{\partial f_{20}}{\partial p^{(10)}}p^{(20)} + 2\frac{\partial f_{11}}{\partial p^{(10)}}p^{(11)} + 2\frac{\partial f_{02}}{\partial p^{(10)}}p^{(02)} + 2\frac{\partial f}{\partial p^{(10)}} - 2\frac{df_{20}}{dt} - \frac{df_{11}}{du} = 0,$$

$$2\frac{\partial f_{20}}{\partial p^{(01)}}p^{(20)} + 2\frac{\partial f_{11}}{\partial p^{(01)}}p^{(11)} + 2\frac{\partial f_{02}}{\partial p^{(01)}}p^{(02)} + 2\frac{\partial f}{\partial p^{(01)}} - 2\frac{df_{02}}{du} - \frac{df_{11}}{dt} = 0,$$

oder, wie leicht zu sehen,

$$(4.) \qquad 2\frac{\partial f_{02}}{\partial p^{(10)}} - \frac{\partial f_{11}}{\partial p^{(01)}} = 0, \quad 2\frac{\partial f_{20}}{\partial p^{(01)}} - \frac{\partial f_{11}}{\partial p^{(10)}} = 0,$$

$$(5.) \quad \begin{cases} 2\frac{\partial f}{\partial p^{(10)}} - 2\frac{\partial f_{20}}{dt} - 2\frac{\partial f_{20}}{\partial p}p^{(10)} - \frac{\partial f_{11}}{\partial u} - \frac{\partial f_{11}}{\partial p}p^{(01)} = 0 \\ 2\frac{\partial f}{\partial p^{(01)}} - 2\frac{\partial f_{02}}{\partial u} - 2\frac{\partial f_{02}}{\partial p}p^{(01)} - \frac{\partial f_{11}}{\partial t} - \frac{\partial f_{11}}{\partial p}p^{(10)} = 0. \end{cases}$$

Die Vergleichung von (3.) und (2.) liefert die Beziehungen

$$f_{20} = -\frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)2}}, \quad f_{11} = -2\frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)}\partial p^{(01)}}, \quad f_{02} = -\frac{\partial^2 H}{\partial p^{(01)2}},$$

$$f = \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial^2 H}{\partial t\,\partial p^{(10)}} - \frac{\partial^2 H}{\partial u\,\partial p^{(01)}} - \frac{\partial^2 H}{\partial p\,\partial p^{(10)}}p^{(10)} - \frac{\partial^2 H}{\partial p\,\partial p^{(01)}}p^{(01)};$$

und soll das Princip der Energie gelten, so müssen die Functionen $f_{20}, f_{11}, f_{02}, f$

von t und u unabhängig sein und einerseits der Gleichung

$$f_{11}^2 = 4 f_{20} f_{02}, \tag{6.}$$

andererseits zufolge (4.) und (5.) den Bedingungen

$$\left\{\begin{aligned} &2\frac{\partial f_{02}}{\partial p^{(10)}} - \frac{\partial f_{11}}{\partial p^{(01)}} = 0, \quad 2\frac{\partial f_{20}}{\partial p^{(01)}} - \frac{\partial f_{11}}{\partial p^{(10)}} = 0, \\ &2\frac{\partial f}{\partial p^{(10)}} - 2\frac{\partial f_{20}}{\partial p}\, p^{(10)} - \frac{\partial f_{11}}{\partial p}\, p^{(01)} = 0, \\ &2\frac{\partial f}{\partial p^{(01)}} - 2\frac{\partial f_{02}}{\partial p}\, p^{(01)} - \frac{\partial f_{11}}{\partial p}\, p^{(10)} = 0 \end{aligned}\right. \tag{7.}$$

identisch genügen.

Man sieht unmittelbar aus den für die Transformation der Differentialgleichung in die *Lagrange*sche Form nothwendigen und hinreichenden Bedingungen (4.) und (5.), dass, wenn f_{20}, f_{11}, f_{02} Constanten sind, dieselbe die Form haben muss

$$A p^{(20)} + B p^{(11)} + C p^{(02)} + f(t, u, p) = 0, \tag{8.}$$

und dass das zugehörige kinetische Potential lautet

$$H = -\frac{A}{2} p^{(10)^2} - \frac{B}{2} p^{(10)} p^{(01)} - \frac{C}{2} p^{(01)^2} + \int f(t, u, p)\, dp, \tag{9.}$$

während, wenn das Energieprincip bestehen soll, die Gleichung (8.) die Form annimmt

$$A p^{(20)} + B p^{(11)} + C p^{(02)} + f(p) = 0, \tag{10.}$$

und das kinetische Potential vermöge (6.) in

$$H = -\left(\sqrt{\frac{A}{2}}\, p^{(10)} + \sqrt{\frac{C}{2}}\, p^{(01)}\right)^2 + \int f(p)\, dp \tag{11.}$$

übergeht, worin der erste Theil, negativ genommen, früher als lebendige Kraft oder kinetische Energie definirt worden ist; das Energieprincip selbst hat dann die Form

$$\left(\sqrt{\frac{A}{2}}\, p^{(10)} + \sqrt{\frac{C}{2}}\, p^{(01)}\right)^2 + \int f(p)\, dp = h, \tag{12.}$$

worin h eine willkürliche Constante bedeutet.

Für den Fall dass in (10.) $f(p) = 0$, also nach (12.) die lebendige Kraft constant ist, lautet das allgemeine Integral

$$p = t\varphi\left(u - \frac{B}{2A} t\right) + \psi\left(u - \frac{B}{2A} t\right), \tag{13.}$$

worin φ und ψ willkürliche Functionen bedeuten, und entspricht dem

Falle der Mechanik wägbarer Massen, welcher das Trägheitsgesetz definirt. Ist, um noch das Analogon zu der durch $\frac{d^2x}{dt^2} = g$ ausgedrückten Bewegung zu erörtern, $f(p)$ eine Constante g, so wird das Energieprincip die Form haben

$$\left(\sqrt{\frac{A}{2}}\, p^{(10)} + \sqrt{\frac{C}{2}}\, p^{(01)}\right)^2 + gp = h,$$

während das allgemeine Integral der Differentialgleichung (10.) lautet

$$p = t\varphi\left(u - \frac{B}{2A}\, t\right) + \psi\left(u - \frac{B}{2A}\, t\right) - \frac{g}{2A}\, t^2,$$

worin φ und ψ wiederum willkürliche Functionen darstellen.

Ist dagegen in der Gleichung (8.) $B^2 - 4AC \neq 0$, so ist ein Energieprincip nicht vorhanden, wie z. B. für die partiellen Differentialgleichungen

$$p^{(20)} = a^2 p^{(02)}, \quad p^{(20)} + p^{(02)} + \varkappa^2 p = 0 \text{ u. a.},$$

welche die *Lagrange*sche Form haben für die kinetischen Potentiale

$$H = -\frac{1}{2} p^{(10)^2} + \frac{a^2}{2} p^{(01)^2}, \qquad H = -\frac{1}{2} p^{(10)^2} - \frac{1}{2} p^{(01)^2} + \frac{\varkappa^2}{2} p^2, \text{ u. a.},$$

und es ist deren allgemeines Integral bekanntlich ebenfalls, wenn die Function f von p unabhängig ist, in einfacher Form darstellbar.

Dass ebenso für mehr als zwei unabhängige Variable die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} + \varkappa^2 p = 0 \text{ u. a.}$$

für die kinetischen Potentiale

$$H = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)^2 + \frac{\varkappa^2}{2} p^2 \text{ u. a.}$$

auf die *Lagrange*sche Gleichungsform reducirt werden, ist unmittelbar ersichtlich.

§ 9.

Ueber eine Eigenschaft kinetischer Potentiale mit mehreren unabhängigen Variabeln.

Für ein kinetisches Potential erster Ordnung H von μ abhängigen Variabeln $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ und ϱ unabhängigen Variabeln $t_1, t_2, \ldots, t_\varrho$ sind nach § 2 die durch das erweiterte *Hamilton*sche Princip

$$\delta \int_{t_1^0}^{t_1^1} \int_{t_2^0}^{t_2^1} \cdots \int_{t_\varrho^0}^{t_\varrho^1} \left(H - \sum_1^\mu{}_s P_s p_s\right) dt_\varrho\, dt_{\varrho-1} \ldots dt_1 = 0,$$

worin die Variationen der Variabeln $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ an den Grenzen des $(t_1, t_2, \ldots, t_\varrho)$-Gebietes gleich Null angenommen werden, und P_s, die in übertragener Weise äussere Kräfte genannten Grössen, als Constanten oder Functionen der unabhängigen Variabeln gegeben sind, dargestellten Veränderungsgleichungen

$$(1.)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt_1}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10\ldots0)}} - \frac{d}{dt_2}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01\ldots0)}} \\ &\qquad - \cdots - \frac{d}{dt_\varrho}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(00\ldots1)}} = P_s, \end{aligned} \right. \qquad (s = 1, 2, \ldots, \mu)$$

welche μ partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung in μ abhängigen und ϱ unabhängigen Variabeln liefern, die in den zweiten partiellen Ableitungen linear sind.

Setzt man nun

$$(2.)\qquad a_1 t_1 + a_2 t_2 + \cdots + a_\varrho t_\varrho = t,$$

worin $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ willkürliche Constanten bedeuten, und

$$(3.)\qquad p_s = f_s(a_1 t_1 + a_2 t_2 + \cdots + a_\varrho t_\varrho) = f_s(t),$$

so wird, wenn p_s als Function von t mit q_s, und $\frac{dp_s}{dt}$ mit q_s' bezeichnet wird,

$$(4.)\qquad p_s^{(10\ldots0)} = a_1 q_s', \quad p_s^{(01\ldots0)} = a_2 q_s', \quad \cdots p_s^{(00\ldots1)} = a_\varrho q_s'$$

sein; nimmt man ferner an, dass die unabhängigen Variabeln $t_1, t_2, \ldots, t_\varrho$ in dem kinetischen Potential H nicht explicite vorkommen und setzt

$$H(p_s, p_s^{(10\ldots0)}, p_s^{(01\ldots0)}, \ldots p_s^{(00\ldots1)}) = H(q_s, a_1 q_s', a_2 q_s', \ldots a_\varrho q_s') = (H),$$

so ergiebt sich unmittelbar in bekannten Bezeichnungen

$$\frac{\partial(H)}{\partial q_s} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_s}\right), \quad \frac{\partial(H)}{\partial q_s'} = a_1\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10\ldots0)}}\right) + a_2\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01\ldots0)}}\right) + \cdots + a_\varrho\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(00\ldots1)}}\right)$$

und daher

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial(H)}{\partial q_s'} &= a_1\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10\ldots0)}}\right) + a_2\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01\ldots0)}}\right) + \cdots + a_\varrho\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(00\ldots1)}}\right) \\ &= \left(\frac{d}{dt_1}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10\ldots0)}}\right) + \left(\frac{d}{dt_2}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01\ldots0)}}\right) + \cdots + \left(\frac{d}{dt_\varrho}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(00\ldots1)}}\right), \end{aligned}$$

so dass aus der durch Substitution der Grössen (4.) in die Differentialgleichung (1.) hervorgehenden Gleichung

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p_s}\right) - \left(\frac{d}{dt_1}\,\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10\ldots0)}}\right) - \left(\frac{d}{dt_2}\,\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01\ldots0)}}\right) - \cdots - \left(\frac{d}{dt_\varrho}\,\frac{\partial H}{\partial p_s^{(00\ldots1)}}\right) = (P_s)$$

die Beziehung

$$\frac{\partial(H)}{\partial q_s} - \frac{d}{dt}\,\frac{(\partial H)}{\partial q_s'} = (P_s) \qquad (s = 1, 2, \ldots, \mu) \tag{5.}$$

folgt, welches die Form der *Lagrange*schen Bewegungsgleichung für das kinetische Potential erster Ordnung (H) ist, welches wiederum von μ abhängigen Variabeln $q_1, q_2, \ldots q_\mu$, jedoch nur von der einen unabhängigen Variabeln t abhängt. Es ist jedoch zu bemerken, dass man annehmen muss, die äusseren Kräfte P_s seien unabhängig von $t_1, t_2, \ldots, t_\varrho$, dass man aber zulassen darf, sie seien Functionen von $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$, in welchem Falle man dann unmittelbar von den erweiterten *Lagrange*schen Gleichungen und nicht von dem oben aufgestellten *Hamilton*schen Princip ausgehen wird.

Für jedes Integralsystem des Differentialgleichungssystems (5.)

$$q_1 = \varphi_1(t, c_1, c_2, \ldots, c_\lambda), \qquad q_2 = \varphi_2(t, c_1, c_2, \ldots, c_\lambda),$$
$$\ldots\, q_\mu = \varphi_\mu(t, c_1, c_2, \ldots, c_\lambda)$$

erhält man nach (3.) ein Integralsystem der Differentialgleichungen (1.) in der Form

$$p_1 = \varphi_1(a_1 t_1 + a_2 t_2 + \cdots + a_\varrho t_\varrho, c_1, c_2, \ldots, c_\lambda),$$
$$\ldots\, p_\mu = \varphi_\mu(a_1 t_1 + a_2 t_2 + \cdots + a_\varrho t_\varrho, c_1, c_2, \ldots, c_\lambda),$$

und da, wie man sogleich sieht, genau dieselben Schlüsse auf kinetische Potentiale beliebig hoher Ordnung angewendet werden können, so ergiebt sich der folgende Satz:

Ist H ein kinetisches Potential ν-ter Ordnung von μ abhängigen Variabeln $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ und ϱ unabhängigen Variabeln $t_1, t_2, \ldots, t_\varrho$ und sind die durch das erweiterte Hamiltonsche Princip

$$\delta \int_{t_1^0}^{t_1^1} \int_{t_2^0}^{t_2^1} \cdots \int_{t_\varrho^0}^{t_\varrho^1} \left(H - \sum_1^\mu{}_s P_s p_s\right) dt_\varrho\, dt_{\varrho-1} \ldots dt_1 = 0, \tag{6.}$$

worin die Variationen der Variabeln $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ an den Grenzen des $(t_1, t_2, \ldots, t_\varrho)$-Gebietes gleich Null angenommen werden und die Grössen P_s als Functionen der t vorgelegt sind, gegebenen erweiterten Lagrangeschen Gleichungen

$$(7.)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt_1}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10\ldots0)}} - \frac{d}{dt_2}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01\ldots0)}} - \cdots - \frac{d}{dt_\varrho}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(00\ldots1)}} \\ &\quad + \frac{d^2}{dt_1^2}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(20\ldots0)}} + \frac{d^2}{dt_1\,dt_2}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(11\ldots0)}} + \cdots + \frac{d^2}{dt_\varrho^2}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(00\ldots2)}} \\ &\quad + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt_\varrho^\nu}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(00\ldots\nu)}} = P_s \end{aligned}\right. \qquad (s=1,2,\ldots,\mu),$$

worin nunmehr H die unabhängigen Variabeln $t_1, t_2, \ldots, t_\varrho$ nicht explicite enthalten soll und P_s als gegebene Functionen der abhängigen Grössen betrachtet werden mögen — wofür dann das Hamiltonsche Princip die Lagrangeschen Gleichungen nicht darstellt —, so werden, wenn $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ willkürliche Constanten bedeuten, und

$$a_1 t_1 + a_2 t_2 + \cdots + a_\varrho t_\varrho = t, \qquad p_s = q_s, \qquad \frac{d^r q_s}{dt^r} = q_s^{(r)}$$

gesetzt und der durch Substitution von

$$p_s^{(10\ldots0)} = a_1 q_s', \ldots, p_s^{(00\ldots1)} = a_\varrho q_s', \quad p_s^{(20\ldots0)} = a_1^2 q_s'', \quad p_s^{(11\ldots0)} = a_1 a_2 q_s'', \ldots$$

hervorgehende Werth des kinetischen Potentials mit (H) bezeichnet wird, die partiellen Differentialgleichungen (7.) *für das so definirte kinetische Potential ν-ter Ordnung (H) der μ abhängigen Variabeln $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$ und der einen unabhängigen Variabeln t in die totalen Lagrangeschen Differentialgleichungen*

$$(8.)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial(H)}{\partial q_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial(H)}{\partial q_s'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial(H)}{\partial q_s''} \\ &\quad - \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial(H)}{\partial q_s^{(\nu)}} = (P_s) \end{aligned}\right. \qquad (s=1,2,\ldots\mu)$$

übergehen, und es wird sich für ein Integralsystem

$$q_1 = \varphi_1(t, c_1, c_2, \ldots c_\lambda), \ldots . q_\mu = \varphi_\mu(t, c_1, c_2, \ldots, c_\lambda)$$

der Differentialgleichungen (8.) *ein Integralsystem der partiellen Differentialgleichungen* (7.) *in der Form ergeben*

$$p_1 = \varphi_1(a_1 t_1 + a_2 t_2 + \cdots + a_\varrho t_\varrho, c_1, \ldots c_\lambda),$$
$$\ldots, p_\mu = \varphi_\mu(a_1 t_1 + a_2 t_2 + \cdots + a_\varrho t_\varrho, c_1, c_2, \ldots c_\lambda).$$

So wird z. B. für das kinetische Potential erster Ordnung einer abhängigen Variabeln p und dreier unabhängiger Variabeln t_1, t_2, t_3

$$H = -\tfrac{1}{2} p^{(100)^2} - \tfrac{1}{2} p^{(010)^2} - \tfrac{1}{2} p^{(001)^2} + \tfrac{1}{2} z^2 p^2$$

die erweiterte *Lagrange*sche Gleichung für $P = 0$ lauten

$$\frac{\partial(H)}{\partial p} - \frac{d}{dt_1}\frac{\partial H}{\partial p^{(100)}} - \frac{d}{dt_2}\frac{\partial H}{\partial p^{(010)}} - \frac{d}{dt_3}\frac{\partial H}{\partial p^{(001)}} = 0$$

oder

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial t_2^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial t_3^2} + \varkappa^2 p = 0$$

und somit, wenn nach dem oben ausgesprochenen Satze

$$(H) = -\tfrac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\, q'^2 + \tfrac{1}{2}\varkappa^2 q^2$$

gesetzt wird, in die totale *Lagrange*sche Gleichung

$$\frac{\partial(H)}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial(H)}{\partial q'} = 0$$

oder

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\frac{d^2 q}{dt^2} + \varkappa^2 q = 0$$

übergehen; das durch den Ausdruck

$$q = c_1 e^{\frac{\varkappa i}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} t} + c_2 e^{-\frac{\varkappa i}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} t}$$

dargestellte allgemeine Integral der letzteren liefert Integrale der gegebenen partiellen Differentialgleichung in der Form

$$q = c_1 e^{\frac{\varkappa i}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} (a_1 t_1 + a_2 t_2 + a_3 t_3)} + c_2 e^{-\frac{\varkappa i}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} (a_1 t_1 + a_2 t_2 + a_3 t_3)}$$

mit vier willkürlichen Constanten.

Genügt das von den unabhängigen Variabeln freie kinetische Potential den für die Existenz des Energieprincips nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, so dass, um zunächst wieder nur von kinetischen Potentialen erster Ordnung von μ abhängigen und ϱ unabhängigen Variabeln zu sprechen, für unendlich viele Integrale des *Lagrange*schen partiellen Differentialgleichungssystems, in denen die äusseren Kräfte P_s gleich Null angenommen werden sollen, die Beziehung besteht

$$(9.)\quad \left\{ H - \sum_1^\mu{}_s\, p_s^{(10\ldots0)} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(10\ldots0)}} - \sum_1^\mu{}_s\, p_s^{(01\ldots0)} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(01\ldots0)}} - \cdots - \sum_1^\mu{}_s\, p_s^{(00\ldots1)} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(00\ldots1)}} = h, \right.$$

worin h eine Constante bedeutet, so wird die oben angegebene Substitution, wie unmittelbar zu sehen, auf die Gleichung

$$(10.) \qquad (H) - \sum_1^\mu{}_s \, q_s' \frac{\partial (H)}{\partial q_s'} = h$$

führen, welche für das von $q_1, \ldots, q_\mu, \; q_1', \ldots, q_\mu'$ abhängige kinetische Potential (H) das stets ohne jede Bedingung für (H) gültige Energieprincip für alle Integrale des zu (H) gehörigen *Lagrange*schen Differentialgleichungssystems darstellt.*).

---

*) Ich will es nicht unterlassen, an dieser Stelle den wesentlichen Unterschied klar hervorzuheben, der sich bei den im § 3 durchgeführten Untersuchungen für die Existenz eines Energieprincips für kinetische Potentiale mit einer und solche mit mehreren unabhängigen Variabeln ergeben hat. Wenn H ein kinetisches Potential erster Ordnung von einer abhängigen Variabeln p und zwei unabhängigen Variabeln t_1 und t_2 ist, und dieses enthält t_1 und t_2 nicht explicite und genügt identisch der Gleichung

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)^2}} \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(01)^2}} - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)} \partial p^{(01)}} \right)^2 = 0$$

oder, was dasselbe ist,

$$(\beta) \qquad \frac{\partial H}{\partial p^{(10)}} = \varphi \left(\frac{\partial H}{\partial p^{(01)}}, p \right),$$

worin φ eine willkürliche Function bedeutet, dann wird jedes Integral der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(\gamma) \qquad H - p^{(10)} \frac{\partial H}{\partial p^{(10)}} - p^{(01)} \frac{\partial H}{\partial p^{(01)}} = \int P \, dp + h,$$

worin h eine beliebige Constante und P eine Function von p bedeutet, und die das Energieprincip ausdrückt, wenn nicht zugleich

$$(\delta) \quad p^{(10)} \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)^2}} + p^{(01)} \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)} \partial p^{(01)}} = 0 \quad \text{oder} \quad p^{(10)} \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)} \partial p^{(01)}} + p^{(01)} \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(01)^2}} = 0$$

ist, wovon nach (α) die eine eine Folge der andern, auch die erweiterte *Lagrange*sche partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(\varepsilon) \qquad \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{d}{dt_1} \frac{\partial H}{\partial p^{(10)}} - \frac{d}{dt_2} \frac{\partial H}{\partial p^{(01)}} = P$$

befriedigen; soll ferner umgekehrt ein Integral von (ε) dem Energieprincip (γ) genügen, so müssen, wie gezeigt worden, die Gleichungen bestehen

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p^{(01)^2}} (p^{(10)} p^{(02)} - p^{(01)} p^{(11)}) = \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)} \partial p^{(01)}} (p^{(01)} p^{(20)} - p^{(10)} p^{(11)}),$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)^2}} (p^{(01)} p^{(20)} - p^{(10)} p^{(11)}) = \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(10)} \partial p^{(01)}} (p^{(10)} p^{(02)} - p^{(01)} p^{(11)}),$$

also jedenfalls wieder die Bedingung (α) erfüllt sein; wir fanden somit, ***dass unter dieser Bedingung und nur unter dieser unendlich viele Integrale der Lagrangeschen Gleichung***

Enthält das kinetische Potential nur *eine* abhängige Variable, so wird die Gleichung (10.) die Form annehmen

$$(11.) \qquad (H) - q_1' \frac{\partial (H)}{\partial q_1'} = h,$$

aus der sich

$$q_1' = f(q_1, h) \quad \text{oder} \quad t + c_1 = \int \frac{dq_1}{f(q_1, h)} = F(q_1, h)$$

als allgemeines Integral ergiebt, und es wird somit

$$a_1 t_1 + a_2 t_2 + \cdots + a_\varrho t_\varrho + c_1 = F(p_1, h)$$

das vollständige Integral des der Gleichung (9.) entsprechenden Princips der Energie

$$(12.) \quad H - p_1^{(10\ldots0)} \frac{\partial H}{\partial p_1^{(10\ldots0)}} - p_1^{(01\ldots0)} \frac{\partial H}{\partial p_1^{(01\ldots0)}} - \cdots - p_1^{(00\ldots1)} \frac{\partial H}{\partial p_1^{(00\ldots1)}} = h$$

sein, aus dem sich in bekannter Weise das allgemeine Integral herleiten lässt.

Genau dieselben Schlüsse in Betreff der Reduction auf nur *eine* unabhängige Variable gelten für kinetische Potentiale beliebiger Ordnung, und man findet, *dass, wenn H ein kinetisches Potential ν^{ter} Ordnung von μ abhängigen Variabeln $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ und ϱ unabhängigen Variabeln $t_1, t_2, \ldots, t_\varrho$ ist, welches $t_1, t_2, \ldots, t_\varrho$ selbst nicht explicite enthält und den für die Existenz des Energieprincips*

$$(13.) \quad \left\{ \begin{array}{l} H - \sum_1^\mu{}_s\, p_s^{(10\ldots0)} \left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(10\ldots0)}} - \frac{d}{dt_1} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(20\ldots0)}} - \frac{d}{dt_2} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(11\ldots0)}} \right. \\ \qquad \left. - \cdots - \frac{d}{dt_\varrho} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(10\ldots1)}} + \frac{d^2}{dt_1^2} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(30\ldots0)}} + \frac{d^2}{dt_1\, dt_2} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(21\ldots0)}} + \cdots \right) \\ - \sum_1^\mu{}_s\, p_s^{(01\ldots0)} \left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(01\ldots0)}} - \frac{d}{dt_1} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(11\ldots0)}} - \cdots + \frac{d^2}{dt_1^2} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(21\ldots0)}} + \cdots \right) \\ - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ - \sum_1^\mu{}_s\, p_s^{(20\ldots0)} \left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(20\ldots0)}} - \frac{d}{dt_1} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(30\ldots0)}} - \frac{d}{dt_2} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(21\ldots0)}} - \cdots \right) \\ - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = h \end{array} \right.$$

---

dem Princip der Energie genügen, und alle, die diesem genügen, auch die Lagrangesche Gleichung befriedigen, dass jedoch nicht, wie es für kinetische Potentiale mit einer unabhängigen Variabeln im Sinne der Mechanik wägbarer Massen der Fall ist, alle Integrale der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen dem Energieprincip unterliegen. Genau dasselbe gilt für kinetische Potentiale beliebiger Ordnung und einer willkürlichen Anzahl abhängiger und unabhängiger Variabeln.

geforderten nothwendigen und hinreichenden Bedingungen genügt, sich mit Beibehaltung der oben definirten Bezeichnungen die Beziehung

$$(14.)\quad \left\{\begin{array}{l} (H) - \sum_1^\mu{}_s\, q_s' \left(\frac{\partial(H)}{\partial q_s'} - \frac{d}{dt}\frac{\partial(H)}{\partial q_s''} + \cdots + (-1)^{\nu-1}\frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\frac{\partial(H)}{\partial q_s^{(\nu)}}\right) \\ \quad - \sum_1^\mu{}_s\, q_s'' \left(\frac{\partial(H)}{\partial q_s''} - \frac{d}{dt}\frac{\partial(H)}{\partial q_s'''} + \cdots + (-1)^{\nu-2}\frac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}}\frac{\partial(H)}{\partial q_s^{(\nu)}}\right) \\ \quad - \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad - \sum_1^\mu{}_s\, q_s^{(\nu)}\frac{\partial(H)}{\partial q_s^{(\nu)}} = h \end{array}\right.$$

ergiebt, und diese Gleichung stellt für das von den μ abhängigen Variabeln $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$ und der einen unabhängigen Variabeln t abhängende kinetische Potential ν^{ter} Ordnung (H) bekanntlich) das stets ohne jede Bedingung für (H) gültige Energieprincip dar.*

---

*) Vergl. meine „Principien der Mechanik“ § 7.

Ueber Grenzen, innerhalb deren gewisse bestimmte Integrale vorgeschriebene Vorzeichen behalten*).

(Von *L. Fuchs***.)

I.

Es sei $F(u, u', \ldots, u^{(n)})$ eine quadratische Form der unbestimmten Function u und ihrer n ersten Ableitungen $u', \ldots, u^{(n)}$ nach einer unabhängigen Variablen x, deren Coefficienten gegebene reale und eindeutige Functionen der realen Variablen x sind. Wir setzen ferner voraus, dass die Function u ebenfalls real ist und nebst ihren Ableitungen in der Nähe eines Werthes $x = a$ sich regulär verhält, und stellen uns die Aufgabe, ein Intervall von a bis b anzugeben von der Beschaffenheit, dass das Vorzeichen des Integrals

$$\int_a^x F(u, u', \ldots, u^{(n)})\, dx$$

*) Ein Auszug der vorliegenden Arbeit ist in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie vom 9. Januar 1902, S. 4ff. erschienen.

**) Während der Drucklegung der vorliegenden Arbeit wurde der Verfasser *L. Fuchs* am Nachmittag des 26. April d. J. aus voller Schaffenskraft der Wissenschaft und diesem Journal — dessen Bände einen grossen Theil seines Lebenswerkes enthalten, und dem er seit dem Jahre 1892 als Herausgeber vorgestanden hat — jählings entrissen. Am Vormittag seines Todestages hatte er noch die erste Correctur des ersten Bogens dieser Arbeit erledigt. Die Besorgung der weiteren Correcturen und diese vorläufige Anzeige haben, Namens der verwaisten Journal-Redaction, die Unterzeichneten schmerzerfüllt übernommen.

R. Fuchs, L. Schlesinger.

für ***jede beliebige*** der bezeichneten Functionen u beständig ***dasselbe*** bleibt, so lange x dem Intervalle a bis b angehört.

Wir bedienen uns hierzu eines Hülfsmittels, welches dem in der Variationsrechnung bei der Umformung der zweiten Variation angewendeten analog ist.

Wir suchen nämlich einen linearen Differentialausdruck

$$(1.) \qquad Q(u) = u^{(n)} + q_1 u^{(n-1)} + \cdots + q_n u,$$

dessen Coefficienten reale Functionen von x, so zu bestimmen, dass

$$(2.) \qquad F(u, u', \ldots, u^{(n)}) - p_{nn} Q(u)^2 = \frac{d}{dx}(\varphi(u, u', \ldots, u^{(n-1)}))$$

wird, wo p_{nn} den Coefficienten von $u^{(n)^2}$ in $F(u, u', \ldots, u^{(n)})$ bezeichnet, und wo φ ebenfalls eine quadratische Form ist, deren Coefficienten wohlbestimmte reale Functionen von x bedeuten.

Während jedoch in der Gleichung

$$(3.) \qquad \left\{ \begin{aligned} \int_a^x F(u, u', \ldots, u^{(n)})\, dx &= \varphi(u, u', \ldots, u^{(n-1)})_{x=x} \\ &\quad - \varphi(u, u', \ldots, u^{(n-1)})_{x=a} + \int_a^x p_{nn} Q(u)^2\, dx \end{aligned} \right.$$

das Vorzeichen des Ausdruckes

$$\varphi(u, u', \ldots, u^{(n-1)})_{x=x} - \varphi(u, u', \ldots, u^{(n-1)})_{x=a}$$

in der Variationsrechnung, der Natur der in dieser Disciplin behandelten Probleme entsprechend, ausser Betracht kommt, ist es für unsere Aufgabe unumgänglich nöthig, das Vorzeichen dieses Ausdruckes zu kennen.

Wir führen in dieser Arbeit die Untersuchung zunächst für den Fall aus, wo die Coefficienten der Form $F(u, u', \ldots, u^{(n)})$ von x unabhängige reale Grössen sind, also für

$$(4.) \qquad F(u, u', \ldots, u^{(n)}) = \sum_{k,l} c_{kl} u^{(k)} u^{(l)} \qquad \begin{pmatrix} k = 0, 1, \ldots, n \\ l = 0, 1, \ldots, n \end{pmatrix},$$

wo c_{kl} reale Constanten bedeuten.

Ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun, können wir $a = 0$ wählen.

II.

Für $n = 1$ sei

$$(1.) \qquad Q(u) = u' + q_1 u$$

und

$$(2.) \qquad F(u, u') - c_{11} Q(u)^2 = 2(c_{01} - c_{11} q_1) u u' + (c_{00} - c_{11} q_1^2) u^2.$$

Soll die rechte Seite dieser Gleichung für eine unbestimmte Function u ein vollständiger Differentialquotient sein, so ist die Bedingung zu erfüllen

$$c_{00} - c_{11} q_1^2 = - c_{11} q_1'. \tag{3.}$$

Alsdann ist*)

$$F(u, u') - c_{11} Q(u)^2 = \frac{d}{dx} (c_{01} - c_{11} q_1) u^2. \tag{4.}$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung (3.) ist bekanntlich

$$q_1 = r \frac{A e^{rx} - B e^{-rx}}{A e^{rx} + B e^{-rx}}, \tag{5.}$$

wo

$$r = \sqrt{\frac{c_{00}}{c_{11}}},$$

und A und B willkürliche Constanten bedeuten.

Wir wählen uns dasjenige particuläre Integral, welches für $x = 0$ unendlich wird; dasselbe lautet

$$q_1 = - r \frac{e^{rx} + e^{-rx}}{e^{rx} - e^{-rx}}. \tag{6.}$$

Der Ausdruck q_1 ist immer eine reale Function von x. Haben nämlich c_{00}, c_{11} gleiche Vorzeichen, so ist r real, sind die Vorzeichen von c_{00}, c_{11} entgegengesetzt, so ist r rein imaginär $r = \varrho i$ und es ist $q_1 = - \varrho \operatorname{cotg} \varrho x$.

Für Functionen u, welche sich in der Nähe von $x = 0$ regulär verhalten und für $x = 0$ verschwinden, ist $q_1 u$, folglich $Q(u)$ ebenfalls in der Nähe von $x = 0$ regulär. Dasselbe gilt von dem Ausdrucke $(c_{00} - c_{11} q_1) u^2$, welcher für $x = 0$ den Werth Null annimmt.

Aus (4.) ergiebt sich also

$$\int_0^x F(u, u')\, dx = (c_{01} - c_{11} q_1) u^2 + c_{11} \int_0^x Q(u)^2\, dx. \tag{7.}$$

Wir nehmen jetzt an, dass c_{11} positiv sei. Nach Gleichung (6.) hat q_1 für hinlänglich kleine positive Werthe von x einen beliebig grossen negativen Werth; demnach ist für dieselben Werthe von x der Ausdruck $c_{01} - c_{11} q_1$ positiv. Dieser Ausdruck behält das positive Vorzeichen bis

$$c_{01} - c_{11} q_1 = 0 \tag{8.}$$

wird.

*) Vergl. ***Legendre***, Mémoires de l'Académie des sciences de Paris 1786.

Ist $x = \alpha$ der kleinste positive Werth, für welchen q_1 unendlich wird, β die kleinste positive Wurzel der Gleichung (8.) und bezeichnen wir mit b die kleinere der beiden Grössen α und β, so ergiebt sich demnach, ***dass für eine beliebige Function u, welche für $x = 0$ verschwindet und in der Nähe von $x = 0$ sich regulär verhält, die linke Seite der Gleichung*** (7.) ***positiv bleibt, solange x dem Intervalle 0 bis b angehört.***

III.

Für $n > 1$ würde das *Legendre*sche Verfahren die Integration eines complicirten Systems von Differentialgleichungen erfordern, dessen Discussion in Bezug auf Realität und Stetigkeit der Lösungen sehr mühsam wäre. Es ist daher die Bestimmung von $Q(u)$ nach einem Verfahren vorzuziehen, welches dem von *Jacobi* für die Discussion der zweiten Variation gelehrten analog ist. Wir gehen zu diesem Zwecke von der Differentialgleichung

$$P(y) = \sum_{kl} (-1)^l c_{kl}\, y^{(k+l)} = 0 \tag{1.}$$

$$(k = 0, \ldots, n; \quad l = 0, \ldots, n)$$

aus.

Da

$$c_{kl} = c_{lk}, \tag{2.}$$

so erhält die Gleichung (1.) die Form

$$P(y) = \sum_{m=0}^{n} C_m\, y^{(2m)} = 0, \tag{3.}$$

wo

$$C_m = 2 \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k c_{2m-k,k} + (-1)^m c_{mm}. \tag{4.}$$

Wir bilden nunmehr den linearen Differentialausdruck $n$ter Ordnung $Q(u)$ derart, dass $Q(u)$ verschwindet, wenn für u ein System linear unabhängiger Lösungen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ der Gleichung (3.) gesetzt wird.

Diese Lösungen haben gewisse von *Hesse**) und *Clebsch***) aufgestellte Bedingungen zu befriedigen. Dieselben sind erfüllt, wenn wir die Anfangswerthe von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ so wählen, dass, für $x = 0$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ bezw. der Ordnung $2n-1$, $2n-2, \ldots, n$ verschwinden***).

---

*) Dieses Journal Bd. 54.

**) Dieses Journal Bd. 55.

***) Vgl. *Frobenius*, dieses Journal Bd. 85, S. 198.

Wir wollen der Einfachheit wegen, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun, voraussetzen, dass die Wurzeln $\pm r_1, \pm r_2, \ldots, \pm r_n$ der Gleichung

$$(5.) \qquad \sum_{m=0}^{n} C_m r^{2m} = 0$$

von einander verschieden sind.

Eine lineare homogene Differentialgleichung mit constanten Coefficienten hat die Eigenschaft, durch eine beliebige Ableitung einer ihrer Lösungen befriedigt zu werden. Ist daher y eine Lösung der Gleichung (3.), so ist auch jede Ableitung von y eine Lösung derselben Gleichung. Wir können daher die Lösung y_1 so wählen, dass dieselbe für $x = 0$ der Ordnung $2n-1$ verschwindet und dann

$$y_2 = \frac{dy_1}{dx}, \quad y_3 = \frac{d^2 y_1}{dx^2}, \quad \ldots, \quad y_n = \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}.$$

Da eine Gleichung der Form

$$\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \cdots + \gamma_n y_n = 0$$

mit constanten Coefficienten der Voraussetzung nach nur bestehen könnte, wenn die sämmtlichen Coefficienten verschwinden, so sind hiernach $y_1, y_2, \ldots, y_n$ linear unabhängig.

Um für eine lineare homogene Differentialgleichung $m$ter Ordnung mit constanten Coefficienten, für welche die charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln $r_1, r_2, \ldots, r_m$ besitzt, eine Lösung anzugeben, welche nebst ihren $m-2$ ersten Ableitungen für $x = 0$ verschwindet, während die $(m-1)$-te Ableitung den Werth Eins erhält, hat man m Constanten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ derart zu bestimmen, dass

$$r_1^z \gamma_1 + r_2^z \gamma_2 + \cdots + r_m^z \gamma_m = 0,$$

für $z = 0, 1, \ldots, m-2$, und

$$r_1^{m-1} \gamma_1 + r_2^{m-1} \gamma_2 + \cdots + r_m^{m-1} \gamma_m = 1.$$

Diese Gleichungen ergeben

$$(6.) \qquad \gamma_z = \frac{1}{2 r_z \varphi'(r_z)},$$

wo $\varphi(r)$ die linke Seite der charakteristischen Gleichung der vorgelegten Differentialgleichung, $\varphi'(r)$ ihre Ableitung nach r bedeutet.

Auf unsere Gleichung (3.) angewendet ergiebt sich demnach:

$$(7.) \qquad y_1 = \frac{1}{2} \sum_{z=1}^{n} \frac{1}{r_z f_z(r_z)} \left\{ e^{r_z x} - e^{-r_z x} \right\},$$

wo

$$(8.)\qquad \begin{cases} f(z) = \sum_{m=0}^{n} C_m z^{2m}, \\ f_\varkappa(z) = \dfrac{f(z)}{z^2 - r_\varkappa^2}. \end{cases}$$

Nach unseren Voraussetzungen in No. I sind die Coefficienten C_m reale Grössen. Ist daher $r_\varkappa^2$ eine reale Wurzel der Gleichung

$$(5^a.)\qquad \sum_{m=0}^{n} C_m s^{2m} = 0,$$

so ist $f_\varkappa(r_\varkappa)$ real; wenn nun auch $r_\varkappa^2$ positiv ist, so ist unmittelbar zu sehen, dass

$$\frac{1}{r_\varkappa f_\varkappa(r_\varkappa)} \left\{ e^{r_\varkappa x} - e^{-r_\varkappa x} \right\}$$

eine reale Function von x ist. Aber wenn $r_\varkappa^2$ negativ ist, also $r_\varkappa = \varrho_\varkappa i$. so ist

$$\frac{e^{r_\varkappa x} - e^{-r_\varkappa x}}{2 r_\varkappa} = \frac{\sin \varrho_\varkappa x}{\varrho_\varkappa}$$

wiederum real.

Ist dagegen $r_\varkappa^2$ eine complexe Grösse gleich $\alpha + \beta i$, so ist die Summe

$$\sigma = \frac{1}{f_\varkappa(r_\varkappa)} \left\{ \frac{e^{r_\varkappa x} - e^{-r_\varkappa x}}{r_\varkappa} \right\} + \frac{1}{f_\iota(r_\iota)} \left\{ \frac{e^{r_\iota x} - e^{-r_\iota x}}{r_\iota} \right\},$$

wo $r_\iota^2 = \alpha - \beta i$, ins Auge zu fassen. Es sind aber sowohl $f_\varkappa(r_\varkappa)$ und $f_\iota(r_\iota)$ als auch

$$\frac{e^{r_\varkappa x} - e^{-r_\varkappa x}}{r_\varkappa} \quad \text{und} \quad \frac{e^{r_\iota x} - e^{-r_\iota x}}{r_\iota}$$

conjugirte complexe Grössen. Es ist demnach σ eine reale Function von x. Aus diesen Erwägungen ergiebt sich demnach, dass y_1 folglich auch $y_2, \ldots, y_n$ reale Functionen von x sind.

In der Gleichung

$$(9.)\qquad Q(u) = 0,$$

welche durch $y_1, y_2, \ldots, y_n$ befriedigt wird, sind $q_1, \ldots, q_n$ demnach reale Functionen von x. Da die Lösungen dieser Gleichung in der Umgebung von $x = 0$ Potenzreihen mit nur positiven ganzen Potenzen sind, so ergiebt sich*), dass $q_1 x, q_2 x^2, \ldots, q_n x^n$ in der Umgebung von $x = 0$ nach positiven ganzen Potenzen von x entwickelbar sind. Die zu $x = 0$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung der Gleichung (9.) hat der Voraussetzung gemäss die Wurzeln $n, n+1, \ldots, 2n-1$.

*) Dieses Journal Bd. 68, S. 360.

Setzen wir daher

(10.) $$u = x^n v,$$

wodurch (9.) in

(9ª.) $$v^{(n)} + s_1 v^{(n-1)} + \cdots + s_n v = 0$$

übergeht, wo

$$x^n s_\lambda = n_\lambda D^{(\lambda)}(x^n) + (n-1)_{\lambda-1} q_1 D^{(\lambda-1)}(x^n) + (n-2)_{\lambda-2} q_2 D^{(\lambda-2)}(x^n) + \cdots + q_\lambda x^n,$$

so sind die Wurzeln der zu $x = 0$ gehörigen Fundamentalgleichung von (9ª.) $0, 1, 2, \ldots, n-1$, es muss daher $(x^\lambda s_\lambda)_{x=0}$ verschwinden für $\lambda = 1, 2, \ldots, n$.

Die Gleichung $(x s_1)_{x=0} = 0$ ist äquivalent $(n^2 + q_1 x)_{x=0} = 0$, also ergiebt sich

$$q_1 = -\frac{n^2}{x} + \mathfrak{P}_1(x),$$

wo $\mathfrak{P}_1(x)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe bedeutet. Ebenso folgt aus $(x^2 s_2)_{x=0} = 0$

$$\left[\frac{n^2(n-1)^2}{2} + n(n-1) q_1 x + q_2 x^2\right]_{x=0} = 0,$$

also

$$q_2 = \frac{n^2(n^2-1^2)}{2} \frac{1}{x^2} + \mathfrak{P}_2(x),$$

wo wieder $\mathfrak{P}_2(x)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe bedeutet.

Allgemein ist

(11.) $$q_\varkappa = \frac{\alpha_\varkappa}{x^\varkappa} + \mathfrak{P}_\varkappa(x),$$

wo

(12.) $$\alpha_\varkappa = (-1)^\varkappa \frac{n^2(n^2-1^2)\cdots(n^2-(\varkappa-1)^2)}{\varkappa!},$$

und $\mathfrak{P}_\varkappa(x)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe bedeutet.

Um in der Gleichung

(13.) $$F(u, u', \ldots, u^{(n)}) - c_{nn} Q(u)^2 = \frac{d\varphi}{dx}$$

φ zu bestimmen, sei

(14.) $$\varphi = \sum_{kl} A_{kl} u^{(k)} u^{(l)}, \qquad \binom{k=0,\ldots,n-1}{l=0,\ldots,n-1}.$$

Bezeichnen wir wie bisher mit oberen Accenten die Ableitungen nach x, so ist

$$(15.)\quad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dx} = \sum\limits_{kl} A'_{kl}\, u^{(k)}\, u^{(l)} + 2\,u' \sum\limits_{l=0}^{n-1} A_{0l}\, u^{(l)} \\ \qquad\qquad + 2\,u'' \sum\limits_{l=0}^{n-1} A_{1l}\, u^{(l)} + \cdots + 2\,u^{(n)} \sum\limits_{l=0}^{n-1} A_{n-1,l}\, u^{(l)}. \end{cases}$$

Es hat daher (13.) die Gestalt

$$(16.)\quad \begin{cases} F(u, u', \ldots, u^{(n)}) - c_{nn}\, Q(u)^2 \\ \qquad = \sum\limits_{kl} A'_{kl}\, u^{(k)}\, u^{(l)} + 2\,u' \sum\limits_{l=0}^{n-1} A_{0l}\, u^{(l)} \\ \qquad\qquad + 2\,u'' \sum\limits_{l=0}^{n-1} A_{1l}\, u^{(l)} + \cdots + 2\,u^{(n)} \sum\limits_{l=0}^{n-1} A_{n-1,l}\, u^{(l)}. \end{cases}$$

Daraus, dass diese Gleichung in Bezug auf $u, u', \ldots$ identisch erfüllt ist, ergiebt sich

$$(17.)\qquad \frac{dA_{kl}}{dx} + A_{k-1,l} + A_{k,l-1} = c_{kl} - c_{nn}\, q_{n-k}\, q_{n-l},$$

$$(17\,\text{a.})\qquad A_{n-1,l} = c_{n-1,l} - c_{nn}\, q_{n-l}.$$

Die Gleichungen (17.) und (17 a.) liefern auch leicht die expliciten Ausdrücke für $A_{n-\lambda,\mu}$. Setzen wir nämlich

$$(18.)\qquad a_{kl} = c_{kl} - c_{nn}\, q_{n-k}\, q_{n-l},$$

so ergiebt sich

$$(19.)\quad \begin{cases} A_{n-\lambda-1,\mu} = a_{n-\lambda,\mu} - a_{n-\lambda+1,\mu-1} + \cdots \pm a_{n,\mu-\lambda} \\ \qquad - D_x\,(1_1\, a_{n-\lambda+1,\mu} - 2_1\, a_{n-\lambda+2,\mu-1} + 3_1\, a_{n-\lambda+3,\mu-2} \\ \qquad\qquad - \cdots \pm \lambda_1\, a_{n,\mu-\lambda+1}) \\ + D_x^2\,(2_2\, a_{n-\lambda+2,\mu} - 3_2\, a_{n-\lambda+3,\mu-1} + 4_2\, a_{n-\lambda+4,\mu-2} \\ \qquad\qquad - \cdots \pm \lambda_2\, a_{n,\mu-\lambda+2}) \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \pm D_x^{\lambda}\,(\lambda_\lambda\, a_{n,\mu}), \end{cases}$$

wo $\lambda_\varkappa$ Binomialcoefficient ist.

Aus den Gleichungen (17.) oder (19.) folgt:

$$(20.)\qquad \left(A_{n-\lambda-1,\mu}\, x^{n+\lambda-\mu}\right)_{x=0} = \frac{c_{nn}\,(\lambda+1)\,(n-\mu)}{n^2\,(n+\lambda-\mu)}\, \alpha_{\lambda+1}\, \alpha_{n-\mu}.$$

Man bestätigt diese Formel aus den Gleichungen (19.) unmittelbar für $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ und beweist alsdann, mit Hülfe der Gleichung (17.), indem man dieselbe für $k = n - \lambda - 1$, $l = \mu$ auf die Form bringt (5.)

$$(17\text{b.}) \qquad A_{n-\lambda-2,\,\mu} = -\frac{dA_{n-\lambda-1,\,\mu}}{dx} - A_{n-\lambda-1,\,\mu-1} + c_{n-\lambda-1,\,\mu} - c_{nn}\, q_{\lambda+1}\, q_{n-\mu},$$

dass sie gültig ist für $\lambda + 1$, wenn sie für $0, 1, \ldots, \lambda$ erwiesen ist.

Setzen wir

$$n - \lambda - 1 = k, \quad \mu = l,$$

so nimmt die Gleichung (20.) die Form an

$$(20\text{a.}) \qquad (A_{kl}\, x^{2n-k-l-1})_{x=0} = \frac{c_{nn}\,(n-k)\,(n-l)}{n^2\,(2n-k-l-1)}\, \alpha_{n-k}\, \alpha_{n-l}.$$

IV.

Es seien $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_{m+1}(x)$ ganze rationale Functionen m-ten Grades von x, in welchen der Coefficient von x^m gleich Eins ist. Bilden wir die Determinante

$$(1.) \qquad D = \begin{vmatrix} f_1(x+m) & f_2(x+m) & \ldots & f_{m+1}(x+m) \\ f_1(x+m-1) & f_2(x+m-1) & \ldots & f_{m+1}(x+m-1) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_{m+1}(x) \end{vmatrix},$$

so lässt sich dieselbe vermöge der Identität

$$(2.) \qquad \begin{cases} m! = f_\lambda(x+m) - m_1 f_\lambda(x+m-1) \\ \qquad\qquad + m_2 f_\lambda(x+m-2) - \cdots + (-1)^m f_\lambda(x) \end{cases}$$

in

$$(3.) \qquad D = m! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ f_1(x+m-1) & f_2(x+m-1) & f_3(x+m-1) & \ldots & f_{m+1}(x+m-1) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) & \ldots & f_{m+1}(x) \end{vmatrix}$$

umformen.

Setzen wir

$$(4.) \qquad f_\lambda(x) - f_1(x) = \mu_{2\lambda}\, f_{1\lambda}(x),$$

wo $\mu_{2\lambda}$ den Coefficienten der höchsten Potenz von x bedeutet, welcher in der Differenz $f_\lambda(x) - f_1(x)$ vorkommt, so ergiebt sich

$$(5.)\quad D = m!\,\mu_{22}\cdot\mu_{23}\ldots\mu_{2,m+1}\begin{vmatrix} f_{12}(x+m-1) & f_{13}(x+m-1) & \ldots & f_{1,m+1}(x+m-1)\\ f_{12}(x+m-2) & f_{13}(x+m-2) & \ldots & f_{1,m+1}(x+m-2)\\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\\ f_{12}(x) & f_{13}(x) & \ldots & f_{1,m+1}(x)\end{vmatrix}.$$

$f_{12}, f_{13}, \ldots, f_{1,m+1}$ sind ganze rationale Functionen $(m-1)$-ten Grades, bei denen der Coefficient der $(m-1)$-ten Potenz gleich Eins ist.

Die Determinante D lässt sich durch Anwendung der Identität

$$(6.)\quad \left\{\begin{array}{l}(m-1)! = f_{1\lambda}(x+m-1) - (m-1)_1 f_{1\lambda}(x+m-2)\\ \qquad\qquad + (m-1)_2 f_{1\lambda}(x+m-3) - \cdots + (-1)^{m-1} f_{1\lambda}(x)\end{array}\right.$$

umformen in

$$(7.)\quad \left\{\begin{array}{l} D = m!\,\mu_{22}\mu_{23}\ldots\mu_{2,m+1}\times\\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1\\ f_{12}(x+m-2) & f_{13}(x+m-2) & \ldots & f_{1,m+1}(x+m-2)\\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\\ f_{12}(x) & f_{13}(x) & \ldots & f_{1,m+1}(x)\end{vmatrix}\end{array}\right.$$

Setzen wir

$$(8.)\qquad f_{1\lambda}(x) - f_{12}(x) = \mu_{3\lambda} f_{2\lambda}(x),$$

wo $\mu_{3\lambda}$ den Coefficienten der höchsten Potenz von x bedeutet, welcher in der Differenz $f_{1\lambda}(x) - f_{12}(x)$ vorkommt, so ist hiernach

$$(9.)\quad \left\{\begin{array}{l} D = m!\,(m-1)!\,\mu_{22}\mu_{23}\ldots\mu_{2,m+1}\cdot\mu_{33}\ldots\mu_{3,m+1}\times\\ \begin{vmatrix} f_{23}(x+m-2) & f_{24}(x+m-2) & \ldots & f_{2,m+1}(x+m-2)\\ f_{23}(x+m-3) & f_{24}(x+m-3) & \ldots & f_{2,m+1}(x+m-3)\\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\\ f_{23}(x) & f_{24}(x) & \ldots & f_{2,m+1}(x)\end{vmatrix}\end{array}\right.$$

Man sieht, dass durch Fortsetzung dieses Processes schliesslich erhalten wird

$$(10.)\quad \left\{\begin{array}{l} D = m!\,(m-1)!\,(m-2)!\ldots 2!\,1!\\ \quad\cdot\mu_{22}\mu_{23}\ldots\mu_{2,m+1}\\ \quad\cdot\mu_{33}\ldots\mu_{3,m+1}\\ \quad\cdot\ldots\ldots\\ \quad\cdot\mu_{m+1,m+1};\end{array}\right.$$

wo die Bedeutung der μ mit doppeltem Index aus dem vorhergehenden ersichtlich ist.

Wir heben hier einen speciellen Fall hervor, von welchem wir später Gebrauch machen wollen. Sei

$$(11.) \qquad F(x) = (x-m)(x-m-1)\ldots(x-2m)$$

und

$$(12.) \qquad f_\lambda(x) = \frac{F(x)}{x-m-\lambda+1} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, m+1),$$

so ergiebt sich für diesen Fall aus der Gleichung (10.)

$$(A.) \qquad D = (m!\ (m-1)!\ldots 2!\ 1!)^2.$$

V.

Sei

$$(1.) \qquad p_\lambda = \begin{vmatrix} A_{00} & A_{01} & \ldots & A_{0\lambda} \\ A_{10} & A_{11} & \ldots & A_{1\lambda} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{\lambda 0} & A_{\lambda 1} & \ldots & A_{\lambda\lambda} \end{vmatrix},$$

wo die A_{kl} dieselbe Bedeutung haben wie in No. III.

Aus der Gleichung (20a.) No. III ergiebt sich

$$(2.) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \left(p_\lambda\, x^{2(\lambda+1)n-(\lambda+1)^2}\right)_{x=0} \\ \qquad = \dfrac{(n(n-1)\ldots(n-\lambda))^2 \,.\, (\alpha_n\, \alpha_{n-1}\ldots\alpha_{n-\lambda})^2 \,.\, c_{nn}^{\lambda+1} \,.\, \Delta}{n^{2(\lambda+1)}}, \end{array} \right.$$

wo

$$(3.) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{2n-1} & \frac{1}{2n-2} & \ldots & \frac{1}{2n-1-\lambda} \\ \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-3} & \ldots & \frac{1}{2n-1-\lambda-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{2n-1-\lambda} & \frac{1}{2n-1-\lambda-1} & \ldots & \frac{1}{2n-1-2\lambda} \end{vmatrix}.$$

Setzen wir

$$(4.) \qquad \left\{ \begin{array}{l} 2n-1 = \xi, \\ F(\xi) = (\xi-\lambda)(\xi-\lambda-1)\ldots(\xi-2\lambda), \\ f_k(\xi) = \dfrac{F(\xi)}{(\xi-\lambda-k+1)}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, \lambda+1), \end{array} \right.$$

so wird

$$(5.) \qquad \Delta = \frac{1}{\xi(\xi-1)^2(\xi-2)^3\ldots(\xi-\lambda)^{\lambda+1}(\xi-\lambda-1)^{\lambda}\ldots(\xi-2\lambda+1)^2(\xi-2\lambda)} \cdot \Delta'.$$

wo

$$(6.) \qquad \Delta' = \begin{vmatrix} f_1(\xi+\lambda) & f_2(\xi+\lambda) & \ldots f_{\lambda+1}(\xi+\lambda) \\ f_1(\xi+\lambda-1) & f_2(\xi+\lambda-1) & \ldots f_{\lambda+1}(\xi+\lambda-1) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot

von x, die kleiner sind als α, die Coefficienten A_{kl}, der Darstellung derselben durch Gleichung (19.) No. III gemäss, stetige Functionen von x.

Nun ist nach voriger Nummer, Gleichung (B.),

$$(3.) \qquad p_\lambda = \frac{P_\lambda}{x^{2(\lambda+1)n-(\lambda+1)^2}} + \text{Glieder mit steigenden Potenzen von } x.$$

Demnach ist p_λ für $0 < x < \alpha$ stetig und für hinlänglich kleine Werthe von x positiv. Für hinlänglich kleine Werthe innerhalb derselben Grenzen ist daher auch nach Gleichung (2.) φ eine ***definite positive quadratische Form***.

Eine Zeichenänderung von ϱ Coefficienten der Quadrate in Gl. (2.) würde nach dem Trägheitsgesetz bei jeder anderen Art von Transformation der quadratischen Form in eine Summe von Quadraten ebenfalls eine Zeichenänderung von ϱ Coefficienten hervorrufen. Wählt man hierzu die Transformation durch eine orthogonale Substitution, so ergiebt sich aus der Stetigkeit der Coefficienten A_{kl}, dass solche Zeichenänderungen erst eintreten können, wenn die Determinante

$$(4.) \qquad |A_{kl}| = 0$$

ist.

Wir wollen die kleinste positive Wurzel dieser Gleichung mit β bezeichnen.

Wenn wir c_{nn} als positiv voraussetzen, so ist für Functionen u, welche nebst ihren $(n-1)$ ersten Ableitungen für $x=0$ verschwinden und sich überdies nebst ihren n ersten Ableitungen für $x=0$ regulär verhalten, nach Gleichung (13.) No. III

$$(5.) \qquad \begin{cases} \int_0^x F(u, u', \ldots, u^{(n)})\, dx \\ \qquad = \varphi(u, u', \ldots, u^{(n-1)}) + c_{nn} \int_0^x Q(u)^2\, dx. \end{cases}$$

Wir gelangen also zu folgendem Resultat:

Bedeutet u eine beliebige Function, welche nebst ihren $n-1$ ersten Ableitungen für $x=0$ verschwindet und sich überdies nebst ihren n ersten Ableitungen für $x=0$ regulär verhält, so ist das Integral

$$\int_0^x F(u, u', , \ldots, u^{(n)})\, dx$$

für positive zwischen 0 und b gelegene Werthe von x positiv, wenn b die kleinere der beiden Grössen α und β darstellt, und wenn c_{nn} positiv vorausgesetzt wird.

VII.

Die im Vorhergehenden skizzirte Untersuchung hat nicht nur für die Anwendungen ein praktisches Interesse; sie kann vielmehr auch in rein analytischen Fragen verwerthet werden.

Es möge genügen, dieses an dem folgenden Beispiele zu erläutern.

Betrachten wir die Differentialgleichung

$$(\alpha.) \qquad F(u, u', \ldots, u^{(n)}) = f(x),$$

wo $F(u, u', \ldots, u^{(n)})$ dieselbe Beschaffenheit wie im Vorhergehenden hat, während $f(x)$ eine innerhalb des Intervalles von $x = 0$ bis $x = b$ reguläre reale Function der realen Variablen x ist (b ist die in voriger Nummer charakterisirte Grösse).

Wird eine Lösung der Gleichung $(\alpha.)$ durch die Anfangswerthe

$$u = 0,\ u' = 0, \ldots, u^{(n-1)} = 0$$

für $x = 0$ bestimmt*) und diese Lösung für reale positive Werthe von x verfolgt, so unterliegt die Frage, ob man in einem gewissen Intervall einer Singularität von u begegne, bekanntlich grossen Schwierigkeiten. Aus den Resultaten der vorigen Nummer kann man nun beispielsweise folgenden Schluss ziehen:

Ist $\int_0^x f(x)\,dx$ nicht für alle Werthe von x des Intervalles 0 bis b positiv, so kann u nicht in dem ganzen Intervalle eine reale sich regulär verhaltende Function bleiben.

---

*) Dass dabei selbstverständlich $f(0)$ von Null verschieden sein muss, hat mir mein Vater bei der Herstellung des Manuscripts mündlich bemerkt. *R. Fuchs.*

Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen im Anschlusse an das *Riemann*sche Problem.

(Zweite Abhandlung*.)

(Von Herrn *Ludwig Schlesinger* in Klausenburg.)

VI.

Zur näheren Bestimmung des Functionssystems, welches den Anforderungen des durch Angabe der singulären Punkte

$$a_1, a_2, \ldots, a_\sigma, a_{\sigma+1}$$

und der den Convergenzbedingungen genügenden Fundamentalsubstitutionen

$$\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_\sigma$$

bestimmten *Riemann*schen Problems**) genügen, waren wir in der Nr. IV zunächst von einem Systeme der Hauptklasse ausgegangen und hatten dann, den Andeutungen *Riemann*s folgend, innerhalb der Hauptklasse gewisse Functionssysteme als Hauptsysteme in eindeutiger Weise determinirt. Das Verfahren, durch welches ein solches Hauptsystem hergestellt wurde***), lässt jedoch nicht in hinreichend klarer Weise hervortreten, dass die Elemente, die nebst den $a_1, \ldots, a_{\sigma+1}$, $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma$ und den Exponenten das Hauptsystem determiniren, auch wirklich von den $a_1, \ldots, a_{\sigma+1}$ unabhängig sind. Wir

*) Siehe die erste Abhandlung dieses Journal Bd. 123, S. 138ff (Nr. I—V), im Folgenden stets als *A1* mit darauf folgender Seitenzahl des 123. Bandes citirt. Ein Auszug der vorliegenden zweiten Abhandlung ist in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie, 1902, S. 283–290 erschienen.

**) Problem (C), siehe *A1*, S. 160.

***) *A1*, S. 168 unten bis S. 169 Zeile 10 v. u.

wollen deshalb, da gerade dieser Punkt für die folgenden Ueberlegungen sehr wesentlich ist, eine andere Art der Fixirung eines bestimmten Functionssystems innerhalb der Hauptklasse Platz greifen lassen.

Wir gehen wie in der Nr. IV von einem Systeme $y_1, \ldots, y_n$ der Hauptklasse aus und bestimmen zunächst die sämmtlichen Systeme der Hauptklasse, für welche die Exponenten bei den wesentlichen singulären Punkten $a_1, \ldots, a_{\sigma+1}$ mit den entsprechenden Exponenten des Systems $y_1, \ldots, y_n$ übereinstimmen. Diese Systeme hängen dann von $\nu + 1$ willkürlichen Constanten linear ab, wenn $\varrho = \varrho_0 + \nu$ die Anzahl der ausserwesentlichen singulären Punkte des Systems $y_1, \ldots, y_n$ und ϱ_0 die a. a. O.*) angegebene Zahl bedeutet. Dann gehen wir durch das in der Nr. IV**) geschilderte Verfahren zu einem Systeme $z_1, \ldots, z_n$ der Hauptklasse über, welches die Minimalzahl ϱ_0 von ausserwesentlichen singulären Stellen aufweist, und wie a. a. O. angegeben, abgesehen von einer als gemeinsamer Factor aller $z_\varkappa$ auftretenden, von x unabhängigen, sonst aber willkürlichen Grösse eindeutig bestimmt ist.

Das letztere besagt genauer ausgedrückt folgendes: Irgend ein System der Hauptklasse $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, welches bei allen wesentlichen singulären Punkten $a_1, \ldots, a_{\sigma+1}$ zu denselben Exponenten gehört wie $z_1, \ldots, z_n$ geht aus $z_1, \ldots, z_n$ dadurch hervor, dass man alle $z_\varkappa$ mit einer und derselben von x unabhängigen Grösse c multiplicirt:

$$\zeta_\varkappa = c\, z_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n).$$

Bilden wir für die Systeme $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ und $z_1, \ldots, z_n$ die Determinanten

$$|\zeta_\varkappa^{(\lambda-1)}| = \Delta(x), \qquad |z_\varkappa^{(\lambda-1)}| = D(x), \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

so sind diese, da die Substitutionen $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma$ als unimodular vorausgesetzt werden, rationale Functionen von x, und wir haben

$$\Delta(x) = c^n D(x).$$

Setzen wir nun

$$y_\varkappa = \frac{z_\varkappa}{\sqrt[n]{D(x_0)}} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n).$$

---

*) *A 1*, S. 168.

**) *A 1*, S. 169.

wo x_0 einen beliebigen regulären Werth bedeutet und die n-te Wurzel in geeigneter Weise fixirt wird, so ist auch

$$y_\varkappa = \frac{\zeta_\varkappa}{\sqrt[n]{\Delta(x_0)}} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n);$$

das Functionssystem $y_1, \ldots, y_n$ besitzt folglich innerhalb der Gesammtheit der zu denselben Exponenten gehörigen Systeme der Hauptklasse in gewissem Sinne invarianten Charakter. Es ist durch die Eigenschaft charakterisirt, dass seine Hauptdeterminante

$$| y_\varkappa^{(\lambda-1)} | \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

für $x = x_0$ den Werth Eins annimmt. Wir wollen ein derartiges Functionssystem $y_1, \ldots, y_n$ ein (zum Punkte x_0 gehöriges) ***normirtes Hauptsystem*** nennen, durch

$$P\begin{pmatrix} a_1, \ldots, a_\sigma, a_{\sigma+1} \\ \mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma \end{pmatrix} x$$

bezeichnen und den folgenden Betrachtungen stets ein solches System zu Grunde legen.

VII.

Wir denken uns nun, wie am Eingange der Nr. V, die Coefficienten der Substitutionen $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma$ fest gegeben (natürlich so, dass diese Substitutionen die Convergenzbedingungen erfüllen), verlegen $a_{\sigma+1}$ ins Unendliche (wobei dann in der Bezeichnung des Functionssystems $y_1, \ldots, y_n$ der Buchstabe $a_{\sigma+1}$ einfach weggelassen werden soll) und betrachten die $a_1, \ldots, a$ als von einander unabhängige Veränderliche. Es handelt sich dann darum, die Art der Abhängigkeit eines normirten Hauptsystems $y_1, \ldots, y_n$ von den $a_1, \ldots, a_\sigma$ zu untersuchen.

Nach einem Satze des Herrn ***Poincaré****) lässt sich ein Functionssystem der Hauptklasse, welches für $a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$ dieselben Exponenten aufweist wie das System $y_1, \ldots, y_n$, durch ein System von Reihen von der Form (4.) Nr. I**) darstellen. Diese Reihen können durch Multiplication mit einem von η unabhängigen, aber eventuell von den $a_1, \ldots, a_\sigma$ abhängenden Factor stets so eingerichtet werden, dass sie monogene Functionen der $a_1, \ldots, a_\sigma$ werden. Man zeigt dies, durch Anwendung der Methoden,

---

*) Acta Mathematica Bd. V, S. 257.

) ***A 1*, S. 146.

die Herr *Poincaré**) für die Untersuchung der Abhängigkeit der *Fuchs*schen Thetareihen von den die betreffende *Fuchs*sche Gruppe bestimmenden Parametern angegeben hat. Geht man dann von einem solchen Reihensysteme, durch das in der vorigen Nummer beschriebene Verfahren zu dem normirten Hauptsysteme $y_1, \ldots, y_n$ über, so erkennt man, ***dass die Elemente dieses normirten Hauptsystems monogene Functionen der*** $a_1, \ldots, a_\sigma$ sind.

Die lineare Differentialgleichung der *Fuchs*schen Klasse

$$\text{(D.)} \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n y = 0,$$

der die $y_1, \ldots, y_n$ als Functionen von x genügen, hat die Eigenschaft, dass die dem Fundamentalsysteme $y_1, \ldots, y_n$ entsprechende Monodromiegruppe Θ von den $a_1, \ldots, a_\sigma$, die in den Coefficienten von (D.) als Parameter auftreten, unabhängig ist. Nach dem Satze des Herrn *Fuchs***) bestehen folglich für die partiellen Derivirten der $y_\varkappa$ nach den a_λ Gleichungen von der Form

$$\text{(1.)} \qquad \frac{\partial y_\varkappa}{\partial a_\lambda} = B_{\lambda 0} y_\varkappa + B_{\lambda 1} \frac{dy_\varkappa}{dx} + \cdots + B_{\lambda, n-1} \frac{d^{n-1} y_\varkappa}{dx^{n-1}},$$

$$(\varkappa = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

wo die Coefficienten $B_{\lambda 0}, \ldots, B_{\lambda, n-1}$ rationale Functionen von x bedeuten, und zwar constituiren die partiellen Derivirten

$$\text{(2.)} \qquad \frac{\partial y_1}{\partial a_\lambda}, \frac{\partial y_2}{\partial a_\lambda}, \ldots, \frac{\partial y_n}{\partial a_\lambda}$$

ein Functionssystem, welches***) mit $y_1, \ldots, y_n$ zu derselben Klasse (im Sinne *Riemanns*†) gehört. Das Gleiche gilt demnach auch von den partiellen Derivirten zweiter Ordnung und ebenso für die Derivirten beliebig hoher Ordnung. Wir erhalten demnach für die partiellen Derivirten beliebig hoher Ordnung der $y_1, \ldots, y_n$ nach den $a_1, \ldots, a_\sigma$ wohlbestimmte endliche Werthe, wenn den $a_1, \ldots, a_\sigma$ beliebige endliche und von einander verschiedene Werthe beigelegt werden und x einen endlichen von den $a_1, \ldots, a_\sigma$ verschiedenen Werth annimmt. Bedeutet also

$$\text{(3.)} \qquad x = \alpha_0,\ a_1 = \alpha_1, \ldots, a_\sigma = \alpha_\sigma$$

---

*) Acta Mathematica Bd. I u. IV.

**) Berliner Sitzungsberichte 1888, S. 1279 ff.

***) Nach *Fuchs*, a. a. O. S. 1281.

†) Vergl. Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Bd. II, 1, S. 366.

ein System endlicher und von einander verschiedener Werthe der $\sigma+1$ Variabeln $x, a_1, \ldots, a_\sigma$, so sind die Werthe der $y_1, \ldots, y_n$ und die ihrer sämmtlichen partiellen Derivirten nach den $x, a_1, \ldots, a_\sigma$ für dieses Werthesystem endlich und wohlbestimmt; wir können folglich die $y_1, \ldots, y_n$, da sie monogene Functionen der $x, a_1, \ldots, a_\sigma$ sind, in der Umgebung der Stelle (3.) nach dem *Taylor*schen Satze entwickeln. Die $y_1, \ldots, y_n$ sind also in der Umgebung der Stelle (3.) holomorph, und zwar reicht die Umgebung dieser Stelle bis zu den nächstgelegenen Stellen des durch die Gleichungen

$$x = a_\lambda, \quad a_\lambda = a_\mu \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, \sigma) \tag{4.}$$

gegebenen Gebildes.

Als Functionen eines a_λ aufgefasst, sind die $y_1, \ldots, y_n$ demnach holomorph in der Umgebung jeder endlichen Stelle a_λ, die von x und den übrigen der $a_1, \ldots, a_\sigma$ verschieden ist.

Wir verfolgen nun die Aenderung der $y_1, \ldots, y_n$ bei continuirlicher Aenderung der $x, a_1, \ldots, a_\sigma$. Zu diesem Ende repräsentiren wir die $x, a_1, \ldots, a_\sigma$ durch die Punkte einer und derselben Ebene E. Um einen einfach zusammenhängenden Bereich herzustellen, innerhalb dessen die $y_1, \ldots, y_n$ als Functionen von x eindeutig sind, haben wir, wie in der Nr. III, die Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ mit dem unendlich fernen Punkte der Ebene E durch Schnitte

$$(a_1, \infty) = l_1, \ (a_2, \infty) = l_2, \ldots, (a_\sigma, \infty) = l_\sigma$$

zu verbinden; diesen σ Schnitten gesellen wir jetzt noch den Schnitt

$$(x, \infty) = l_0$$

hinzu, um eine Umkreisung des Punktes x durch einen der Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ zu verhindern, bemerken aber gleich, dass, wenn wir das Functionssystem $y_1, \ldots, y_n$ in seiner Abhängigkeit von x studiren, der Schnitt l_0 wieder beseitigt werden soll, um der Variabeln x ihre freie Beweglichkeit zu sichern.

Bei der Definition des Functionssystems $y_1, \ldots, y_n$ ist die gegenseitige Lage der Schnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$ insofern wesentlich, als die Fundamentalsubstitutionen $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma$ diejenigen Aenderungen bestimmen, welche die $y_1, \ldots, y_n$ erleiden, wenn x solche positiven Umläufe um die Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ vollzieht, bei denen die Schnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$ je einmal überschritten werden. Möge die in der Fig. 1 angedeutete Lage der Schnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$ diejenige sein, welche dieser Definition zu Grunde liegt; die daselbst gezeichnete Lage des Schnittes l_0 werde auch als die „ursprüngliche“ im Auge

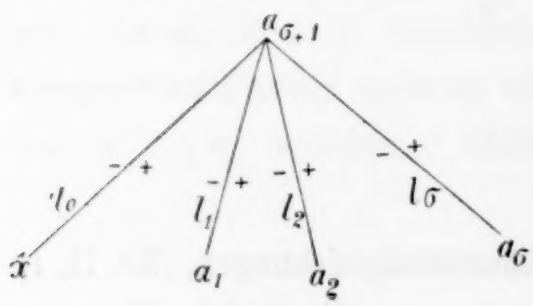


Fig. 1.

behalten; die Bezeichnung der Schnittufer als positive und negative ist derart gewählt, dass x den Schnitt l_λ in der Richtung vom positiven nach dem negativen Ufer hin zu passiren hat, wenn es einen Umlauf um a_λ vollzieht, der die $y_1, \ldots, y_n$ die Substitution A_λ erleiden lässt.

Eine Deformation der Schnitte, welche durch stetige Verschiebung innerhalb der Ebene E erfolgt ohne ein Uebereinandergreifen der Schnitte zu veranlassen, kann als *unwesentlich* gelten.

Lassen wir nun die $a_1, \ldots, a_\sigma$ stetig ihre Lage verändern, jedoch so, dass niemals zwei dieser Punkte mit einander zusammenstossen, und betrachten dabei die $y_1, \ldots, y_n$ als Functionen von x, so werden wir, um die eindeutige Bestimmtheit dieser Functionen zu wahren, die Curvenstücke, welche die einzelnen Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ beschrieben haben, den entsprechenden Schnitten $l_1, \ldots, l_\sigma$ hinzufügen müssen*). Man wird sich also zweckmässiger Weise diese Schnitte (und ebenso den Schnitt l_0) als ausdehnbare und biegsame Fäden vorstellen, die im Stande sind sich einer Lagenänderung der $a_1, \ldots, a_\sigma$ anzupassen. Wenn ferner bei einer Lagenänderung der $a_1, \ldots, a_\sigma$ einer dieser Punkte an einen der Schnitte $l_0, l_1, \ldots, l_\sigma$ heranrückt, so wird um eine Kreuzung der Schnitte**) zu vermeiden, der betreffende Schnitt eine Deformation erfahren müssen, die man sich in der Weise vorstellen mag, dass der sich an den Schnitt herandrängende Punkt a_λ, den diesen Schnitt repräsentirenden Faden vor sich her treibt, und dass der so in Bewegung versetzte Faden eventuell noch andere Fäden (Schnitte) vorwärts drängt, falls er bei seiner Deformation mit ihnen in Collision zu gerathen droht.

Dies festgesetzt, mögen die Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ auf stetigen Bahnen in die Lagen $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\sigma$ übergehen und dabei die Schnitte $l_0, l_1, \ldots, l_\sigma$ in die neuen Lagen $\bar{l}_0, \bar{l}_1, \ldots, \bar{l}_\sigma$ überführen. Denken wir uns während der Bewegung der $a_1, \ldots, a_\sigma$ für jede veränderte Lage dieser Punkte dasjenige normirte Hauptsystem gebildet, welches mit diesen Lagen als singulären Punkten und mit den zu den gleichzeitigen Lagen der Schnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$ gehörigen Fundamentalsubstitutionen $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma$ bestimmt ist, so wird dieses (zu Folge der ana-

---

*) Vergl. hierfür sowie auch für das folgende ***Fuchs***, dieses Journal, Bd. 71, S. 92 ff.

) Herr ***Fuchs*, lässt a. a. O. eine solche Kreuzung zu. Die im Texte festgehaltene Auffassung schliesst sich an ***Nekrassoff***, Mathem. Annalen Bd. 38, S. 513 an, wo es sich jedoch nicht um Querschnitte, sondern um Integrationswege handelt.

lytischen Abhängigkeit des normirten Hauptsystems von den $a_1, \ldots, a_\sigma$) allemal diejenigen Grössen liefern, in welche $y_1, \ldots, y_n$ durch die betrachtete Lagenänderung der $a_1, \ldots, a_\sigma$ übergegangen ist. ***Es wird also, wenn die*** $a_1, \ldots, a_\sigma$ ***in die Endlagen*** $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\sigma$ ***gelangt sind,*** $y_1, \ldots, y_n$ ***sich in das normirte Hauptsystem***

$$P\begin{pmatrix} \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\sigma \\ \mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma \end{pmatrix} x$$

verwandelt haben, welches bei den singulären Punkten $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\sigma, \infty$ ***dieselben Exponenten aufweist wie die*** $y_1, \ldots, y_n$ ***bei den*** $a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$ ***und die Substitutionen*** A_λ ***erfährt, wenn*** x ***einen Umlauf um*** a_λ ***vollzieht, der den neuen Schnitt*** $\bar{l}_\lambda$ ***(und zwar diesen allein, und keinen andern) einmal im positiven Sinne überschreitet.***

Betrachten wir insbesondere den Fall, wo die $a_1, \ldots, a_\sigma$ geschlossene Bahnen beschreiben, so mögen die Schnitte $l_0, l_1, \ldots, l_\sigma$ in die neuen Lagen $\bar{l}_0, \bar{l}_1, \ldots, \bar{l}_\sigma$ übergegangen sein. Das Functionssystem $y_1, \ldots, y_n$ hat sich dann in ein normirtes Hauptsystem

$$P\begin{pmatrix} a_1, \ldots, a_\sigma \\ \mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma \end{pmatrix} x \tag{5.}$$

verwandelt, welches bei $a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$ dieselben Exponenten aufweist wie $y_1, \ldots, y_n$, wo aber die Fundamentalsubstitutionen $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma$ Umläufen von x um die Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ entsprechen, bei denen die ***neuen*** Lagen $\bar{l}_1, \ldots, \bar{l}_\sigma$ der Schnitte je einmal im positiven Sinne überschritten werden. Um dieses Functionssystem (5.) mit dem ursprüglichen Systeme $y_1, \ldots, y_n$ vergleichen zu können, ist es erforderlich diejenigen Substitutionen $\bar{\mathsf{A}}_1, \ldots, \bar{\mathsf{A}}_\sigma$ aufzusuchen, die das Functionssystem (5.) erfährt, wenn x Umläufe um die $a_1, \ldots, a_\sigma$ vollzieht, bei denen die ***ursprünglichen*** Lagen $l_1, \ldots, l_\sigma$ der Schnitte einmal im positiven Sinne überschritten werden. Wenn dies gelungen ist, so können wir sagen, dass $y_1, \ldots, y_n$ sich in das normirte Hauptsystem

$$P\begin{pmatrix} a_1, \ldots, a_\sigma \\ \bar{\mathsf{A}}_1, \ldots, \bar{\mathsf{A}}_\sigma \end{pmatrix} x \tag{5^a.}$$

verwandelt habe, dessen Exponenten bei allen singulären Punkten mit denen von $y_1, \ldots, y_n$ übereinstimmen, und wo die Fundamentalsubstitutionen $\bar{\mathsf{A}}_1, \ldots, \bar{\mathsf{A}}_\sigma$ sich jetzt auf die ursprünglichen Schnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$, wie sie der Definition von $y_1, \ldots, y_n$ selbst zu Grunde liegen, beziehen.

Offenbar bilden die $\overline{\mathsf{A}}_1, \ldots, \overline{\mathsf{A}}_\sigma$ ein System von Fundamentalsubstitutionen derselben Gruppe Θ, die aus den $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma$ als Fundamentalsubstitutionen componirt ist. Da ferner die zu den Substitutionen A_k und $\overline{\mathsf{A}}_k$ gehörigen Fundamentalgleichungen übereinstimmen müssen, erfüllen die Substitutionen $\overline{\mathsf{A}}_1, \ldots, \overline{\mathsf{A}}_\sigma$ ebenfalls die Convergenzbedingungen, wenn dies für die $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma$ der Fall war; wir sind also im Stande, das Functionssystem (5ª.) nach dem in den vorhergehenden Nummern entwickelten Verfahren herzustellen und damit das analytische Verhalten der Functionen $y_1, \ldots, y_n$ bei geschlossenen Umläufen der singulären Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ vollständig zu übersehen, sofern wir die Substitutionen $\overline{\mathsf{A}}_1, \ldots, \overline{\mathsf{A}}_\sigma$ anzugeben im Stande sind.

Ehe wir auf die Aufgabe der Bestimmung dieser Substitutionen eingehen, machen wir noch eine Bemerkung in Bezug auf die lineare Differentialgleichung (D.), der die $y_1, \ldots, y_n$ als Functionen von x genügen.

Die homogene lineare Differentialgleichung der *Fuchs*schen Klasse

$$(\overline{\mathrm{D.}}) \qquad \frac{d^n \bar{y}}{dx^n} + \bar{p}_1 \frac{d^{n-1}\bar{y}}{dx^{n-1}} + \cdots + \bar{p}_n \bar{y} = 0,$$

der das Functionssystem (5ª.) genügt, besitzt dieselben wesentlichen singulären Punkte wie (D.), die zu diesen singulären Punkten gehörigen canonischen Fundamentalsysteme gehören zu denselben Exponenten, wie die entsprechenden Fundamentalsysteme von (D.) (die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen können sich eventuell um ganze Zahlen geändert haben!), die Anzahl der ausserwesentlichen singulären Punkte ist für die Differentialgleichungen (D.) und $(\overline{\mathrm{D.}})$ auch dieselbe, die Lage dieser Punkte kann sich jedoch geändert haben. Die dem Fundamentalsysteme (5ª.) von (D.) entsprechende Monodromiegruppe ist dieselbe (nämlich Θ) wie die dem Fundamentalsysteme $y_1, \ldots, y_n$ entsprechende von (D.), aber die dem Schnittsysteme $l_1, \ldots, l_\sigma$ entsprechenden Fundamentalsubstitutionen sind für $(\overline{\mathrm{D.}})$ andere wie für (D.). — Die Coefficienten von $(\overline{\mathrm{D.}})$ gehen aus den entsprechenden Coefficienten von (D.) hervor, wenn man die $a_1, \ldots, a_\sigma$ die betrachteten geschlossenen Bahnen beschreiben lässt. Die Bestimmung der Substitutionen $\overline{\mathsf{A}}_1, \ldots, \overline{\mathsf{A}}_\sigma$, der wir uns jetzt zuwenden, wird uns auch in die Art der analytischen Abhängigkeit der $p_1, \ldots, p_n$ von den $a_1, \ldots, a_\sigma$ Einsicht gewinnen lassen.

Wir können uns offenbar darauf beschränken, nur einen der singulären Punkte, etwa a_λ geschlossene Umläufe vollziehen zu lassen, während x

und die übrigen der Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ in ihren ursprünglichen Lagen verharren. Wenn man dann die $y_1, \ldots, y_\sigma$ als Functionen von a_λ studirt, so wird man, um dem Punkte a_λ seine freie Beweglichkeit zu sichern, sich den Schnitt (a_λ, ∞) beseitigt denken können und dann zulassen, dass a_λ über die übrigen Schritte hinwegschreitet. In der durch die Schnitte

$$l_0, l_1, \ldots, l_{\lambda-1}, l_{\lambda+1}, \ldots, l_\sigma$$

zerschnittenen Ebene E sind dann $y_1, \ldots, y_n$ als Functionen von a_λ eindeutig determinirt, da ja die $y_1, \ldots, y_n$ nur dann eine Aenderung erfahren können, wenn a_λ einen Umlauf vollzieht, der einen oder mehrere der Punkte

$$x, a_1, \ldots, a_{\lambda-1}, a_{\lambda+1}, \ldots, a_\sigma, \infty$$

in sich schliesst. Für unseren augenblicklichen Zweck ist es jedoch vortheilhafter den Schnitt l_λ beizubehalten, und die Auffassung Platz greifen zu lassen, dass das sich bewegende a_λ die Schnitte, denen es begegnet, vor sich her treibt. Wenn der Umlauf von a_λ nur unwesentliche (siehe oben!) Deformationen der Schnitte $l_0, l_1, \ldots, l_\sigma$ verursacht, d. h. also solche Deformationen, bei denen keiner der Schnitte genöthigt wird, im Verlaufe seiner Deformation über die ursprüngliche Lage von a_λ hinweg zu gleiten, so werden die $y_1, \ldots, y_n$ zu ihren Ausgangswerthen zurückkehren.

Es möge nun a_λ einen einfachen positiven Umlauf um den Punkt x vollziehen. Indem a_λ an das positive Ufer des Schnittes l_0 heranrückt, drängt es diesen Schnitt in die Lage $\bar{l}_0$, und zugleich wird der Schnitt l_λ in die Gestalt $\bar{l}_\lambda$ übergeführt (siehe Fig. 2); die übrigen Schnitte bleiben ungeändert. Das Functionssystem

$$y_1^{0\lambda}, \ldots, y_n^{0\lambda},$$

in welches $y_1, \ldots, y_n$ übergegangen ist, erleidet jetzt, wenn x einen Umlauf vollzieht, der einen Schnitt des ***neuen*** Schnittsystems einmal im positiven Sinne überschreitet, diejenige Substitution A_k, deren Index mit dem des überschrittenen Schnittes übereinstimmt. Um die Substitutionen

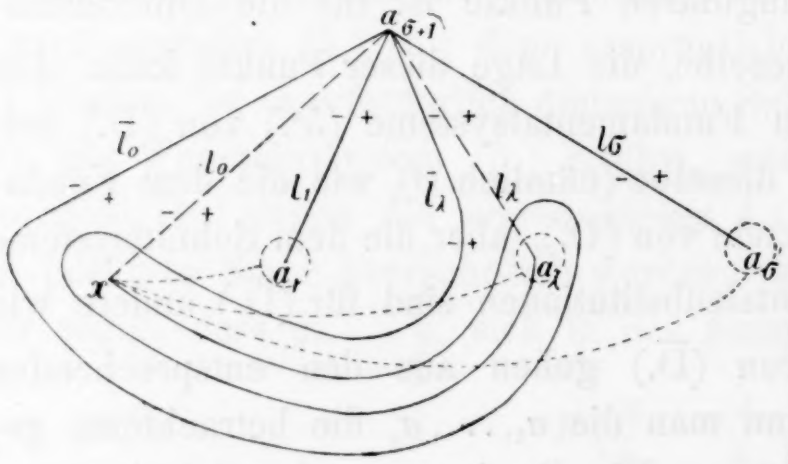


Fig. 2.

$$\mathsf{A}_1^{0\lambda}, \mathsf{A}_2^{0\lambda}, \ldots, \mathsf{A}_\sigma^{0\lambda}$$

aufzustellen, die dieses Functionssystem erleidet, wenn x Umläufe vollzieht, die einen Schnitt des ursprünglichen Schnittsystems im positiven Sinne passiren, legen wir, nach Beseitigung des Schnittes l_0, von x aus einfache Schleifen (lacets) um die Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$, die die alten Schnitte (in der Figur mit unterbrochenen Linien angedeutet) einmal im positiven Sinne überschreiten, und sehen zu, wie oft und in welchem Sinne diese (in der Figur punktirt gezeichneten) Schleifen die Schnitte des neuen Schnittsystems passiren. Wir finden so

$$(6.) \qquad \overset{0\lambda}{\mathsf{A}}_\varkappa = \mathsf{A}_\lambda \, \mathsf{A}_\varkappa \, \mathsf{A}_\lambda^{-1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, \sigma).$$

Das Functionssystem $y_1, \ldots, y_n$ ist also in das durch das Schema

$$P \begin{pmatrix} a_1, \ldots, a_\sigma \\ {}^{0\lambda} \quad\quad {}^{0\lambda} \\ \mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma \end{pmatrix} x$$

gegebene normirte Hauptsystem übergegangen, dessen Exponenten bei den $a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$ mit den entsprechenden Exponenten des Systems $y_1, \ldots, y_n$ übereinstimmen, und wo sich die Fundamentalsubstitutionen

$$\overset{0\lambda}{\mathsf{A}}_1, \ldots, \overset{0\lambda}{\mathsf{A}}_\sigma$$

wieder auf das ursprüngliche Schnittsystem (Fig. 1) beziehen. Ein diesem Schema entsprechendes normirtes Hauptsystem wird aber offenbar durch die Functionen

$$\mathsf{A}_\lambda \, y_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

geliefert, und da das normirte Hauptsystem eindeutig bestimmt ist, haben wir den Satz:

Vollzieht a_λ einen Umlauf um den Punkt x, der den Schnitt l_0 einmal im positiven Sinne überschreitet, so erfahren die $y_1, \ldots, y_n$ dieselbe Substitution A_λ, die durch einen den Schnitt l_λ einmal im positiven Sinne überschreitenden Umlauf von x um a_λ hervorgerufen wird.

Möge nun a_λ einen einfachen positiven Umlauf um einen der Punkte a_h $(h < \lambda)$ oder $a_\varkappa$ $(\varkappa > \lambda)$ vollziehen. Man erkennt dann zunächst unmittelbar, dass nur die Schnitte l_λ und l_h beziehungsweise l_λ und $l_\varkappa$ in neue Lagen $\bar{l}_\lambda$, $\bar{l}_h$ beziehungsweise $\bar{l}_\lambda$, $\bar{l}_\varkappa$ gedrängt werden, während die übrigen Schnitte keine Aenderung erfahren, und dass die Deformation der Schnitte l_λ, l_h, die durch einen einfachen positiven Umlauf von a_λ um a_h verursacht wird, dieselbe ist wie diejenige, die diese Schnitte erfahren, wenn a_h einen

und die übrigen der Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ in ihren ursprünglichen Lagen verharren. Wenn man dann die $y_1, \ldots, y_\sigma$ als Functionen von a_λ studirt, so wird man, um dem Punkte a_λ seine freie Beweglichkeit zu sichern, sich den Schnitt (a_λ, ∞) beseitigt denken können und dann zulassen, dass a_λ über die übrigen Schritte hinwegschreitet. In der durch die Schnitte

$$l_0, l_1, \ldots, l_{\lambda-1}, l_{\lambda+1}, \ldots, l_\sigma$$

zerschnittenen Ebene E sind dann $y_1, \ldots, y_n$ als Functionen von a_λ eindeutig determinirt, da ja die $y_1, \ldots, y_n$ nur dann eine Aenderung erfahren können, wenn a_λ einen Umlauf vollzieht, der einen oder mehrere der Punkte

$$x, a_1, \ldots, a_{\lambda-1}, a_{\lambda+1}, \ldots, a_\sigma, \infty$$

in sich schliesst. Für unseren augenblicklichen Zweck ist es jedoch vortheilhafter den Schnitt l_λ beizubehalten, und die Auffassung Platz greifen zu lassen, dass das sich bewegende a_λ die Schnitte, denen es begegnet, vor sich her treibt. Wenn der Umlauf von a_λ nur unwesentliche (siehe oben!) Deformationen der Schnitte $l_0, l_1, \ldots, l_\sigma$ verursacht, d. h. also solche Deformationen, bei denen keiner der Schnitte genöthigt wird, im Verlaufe seiner Deformation über die ursprüngliche Lage von a_λ hinweg zu gleiten, so werden die $y_1, \ldots, y_n$ zu ihren Ausgangswerthen zurückkehren.

Es möge nun a_λ einen einfachen positiven Umlauf um den Punkt x vollziehen. Indem a_λ an das positive Ufer des Schnittes l_0 heranrückt, drängt es diesen Schnitt in die Lage $\bar{l}_0$, und zugleich wird der Schnitt l_λ in die Gestalt $\bar{l}_\lambda$ übergeführt (siehe Fig. 2); die übrigen Schnitte bleiben ungeändert. Das Functionssystem

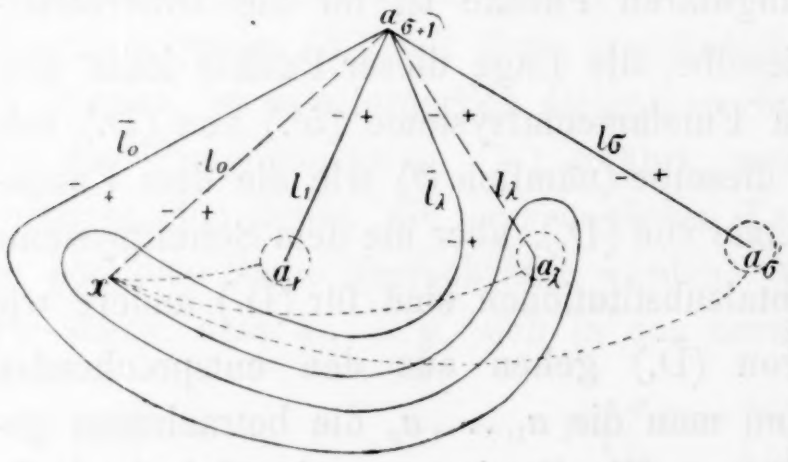


Fig. 2.

$$y_1^{0\lambda}, \ldots, y_n^{0\lambda},$$

in welches $y_1, \ldots, y_n$ übergegangen ist, erleidet jetzt, wenn x einen Umlauf vollzieht, der einen Schnitt des ***neuen*** Schnittsystems einmal im positiven Sinne überschreitet, diejenige Substitution A_k, deren Index mit dem des überschrittenen Schnittes übereinstimmt. Um die Substitutionen

$$\mathsf{A}_1^{0\lambda}, \mathsf{A}_2^{0\lambda}, \ldots, \mathsf{A}_\sigma^{0\lambda}$$

aufzustellen, die dieses Functionssystem erleidet, wenn x Umläufe vollzieht, die einen Schnitt des ursprünglichen Schnittsystems im positiven Sinne passiren, legen wir, nach Beseitigung des Schnittes l_0, von x aus einfache Schleifen (lacets) um die Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$, die die alten Schnitte (in der Figur mit unterbrochenen Linien angedeutet) einmal im positiven Sinne überschreiten, und sehen zu, wie oft und in welchem Sinne diese (in der Figur punktirt gezeichneten) Schleifen die Schnitte des neuen Schnittsystems passiren. Wir finden so

$$(6.) \qquad \overset{0\lambda}{\mathsf{A}}_\varkappa = \mathsf{A}_\lambda \, \mathsf{A}_\varkappa \, \mathsf{A}_\lambda^{-1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, \sigma).$$

Das Functionssystem $y_1, \ldots, y_n$ ist also in das durch das Schema

$$P \begin{pmatrix} a_1, \ldots, a_\sigma \\ 0\lambda \quad\quad 0\lambda \\ \mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma \end{pmatrix} x$$

gegebene normirte Hauptsystem übergegangen, dessen Exponenten bei den $a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$ mit den entsprechenden Exponenten des Systems $y_1, \ldots, y_n$ übereinstimmen, und wo sich die Fundamentalsubstitutionen

$$\overset{0\lambda}{\mathsf{A}}_1, \ldots, \overset{0\lambda}{\mathsf{A}}_\sigma$$

wieder auf das ursprüngliche Schnittsystem (Fig. 1) beziehen. Ein diesem Schema entsprechendes normirtes Hauptsystem wird aber offenbar durch die Functionen

$$\mathsf{A}_\lambda \, y_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

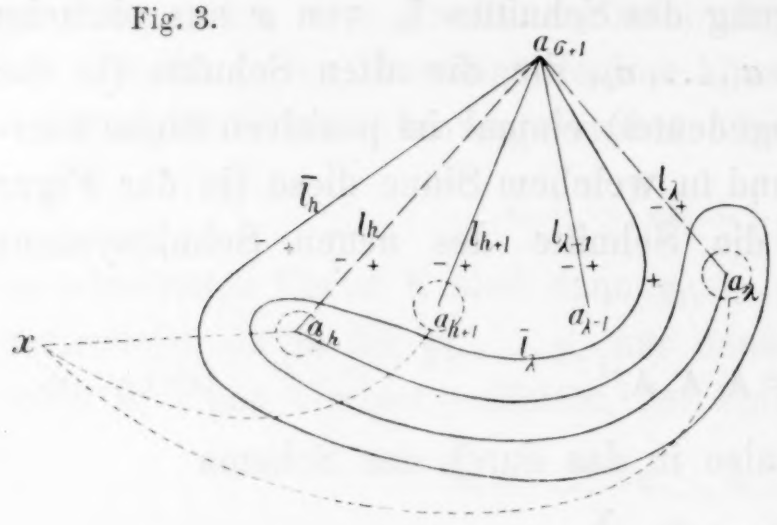
geliefert, und da das normirte Hauptsystem eindeutig bestimmt ist, haben wir den Satz:

Vollzieht a_λ einen Umlauf um den Punkt x, der den Schnitt l_0 einmal im positiven Sinne überschreitet, so erfahren die $y_1, \ldots, y_n$ dieselbe Substitution A_λ, die durch einen den Schnitt l_λ einmal im positiven Sinne überschreitenden Umlauf von x um a_λ hervorgerufen wird.

Möge nun a_λ einen einfachen positiven Umlauf um einen der Punkte a_h $(h < \lambda)$ oder $a_\varkappa$ $(\varkappa > \lambda)$ vollziehen. Man erkennt dann zunächst unmittelbar, dass nur die Schnitte l_λ und l_h beziehungsweise l_λ und $l_\varkappa$ in neue Lagen $\bar{l}_\lambda$, $\bar{l}_h$ beziehungsweise $\bar{l}_\lambda$, $\bar{l}_\varkappa$ gedrängt werden, während die übrigen Schnitte keine Aenderung erfahren, und dass die Deformation der Schnitte l_λ, l_h, die durch einen einfachen positiven Umlauf von a_λ um a_h verursacht wird, dieselbe ist wie diejenige, die diese Schnitte erfahren, wenn a_h einen

einfachen positiven Umlauf um a_λ vollzieht. Wir können also die Fälle $h < \lambda$ und $\varkappa > \lambda$ zusammenfassen, indem wir z. B. den Fall $h < \lambda$ untersuchen und dann die Buchstaben h, λ mit λ, $\varkappa$ vertauschen. Der Fall $h < \lambda$ wird in der Figur 3 veranschaulicht; die Betrachtung der, nach Aufhebung des Schnittes l_0, von x aus über die einzelnen Schnitte des ursprünglichen Systems (unterbrochene Linien in der Figur) hinweg gelegten einfachen Schleifen (punktirte Linien in der Figur) liefert auch hier unmittelbar das System derjenigen Substitutionen

Fig. 3.



$$\overset{h\lambda}{\mathsf{A}}_1, \ldots, \overset{h\lambda}{\mathsf{A}}_\sigma,$$

die das Functionssystem

$$\overset{h\lambda}{y}_1, \ldots, \overset{h\lambda}{y}_n,$$

in welches $y_1, \ldots, y_n$ durch den einfachen positiven Umlauf von a_λ um a_h verwandelt worden ist, erleidet, wenn x die Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ so umkreist, dass es die betreffenden ursprünglichen Schnitte einmal im positiven Sinne durchquert. Wir finden so für das System jener Substitutionen im Falle $h < \lambda$:

$$(7.)\quad \begin{cases} \overset{h\lambda}{\mathsf{A}}_h = \mathsf{A}_h^{-1}\,\mathsf{A}_\lambda^{-1}\,\mathsf{A}_h\,\mathsf{A}_\lambda\,\mathsf{A}_h, \\ \overset{h\lambda}{\mathsf{A}}_\nu = \mathsf{A}_h^{-1}\,\mathsf{A}_\lambda^{-1}\,\mathsf{A}_h\,\mathsf{A}_\lambda\,\mathsf{A}_\nu\,\mathsf{A}_\lambda^{-1}\,\mathsf{A}_h^{-1}\,\mathsf{A}_\lambda\,\mathsf{A}_h, & (h < \nu < \lambda), \\ \overset{h\lambda}{\mathsf{A}}_\lambda = \mathsf{A}_h^{-1}\,\mathsf{A}_\lambda\,\mathsf{A}_h, \\ \overset{h\lambda}{\mathsf{A}}_\mu = \mathsf{A}_\mu, & (\mu < h,\ \mu > \lambda). \end{cases}$$

und daraus durch Vertauschung von h, λ mit $\lambda, \varkappa$ für den Fall $\varkappa > \lambda$:

$$(7^a.)\quad \begin{cases} \overset{\lambda\varkappa}{\mathsf{A}}_\lambda = \mathsf{A}_\lambda^{-1}\,\mathsf{A}_\varkappa^{-1}\,\mathsf{A}_\lambda\,\mathsf{A}_\varkappa\,\mathsf{A}_\lambda, \\ \overset{\lambda\varkappa}{\mathsf{A}}_\nu = \mathsf{A}_\lambda^{-1}\,\mathsf{A}_\varkappa^{-1}\,\mathsf{A}_\lambda\,\mathsf{A}_\varkappa\,\mathsf{A}_\nu\,\mathsf{A}_\varkappa^{-1}\,\mathsf{A}_\lambda^{-1}\,\mathsf{A}_\varkappa\,\mathsf{A}_\lambda, & (\lambda < \nu < \varkappa), \\ \overset{\lambda\varkappa}{\mathsf{A}}_\varkappa = \mathsf{A}_\lambda^{-1}\,\mathsf{A}_\varkappa\,\mathsf{A}_\lambda, \\ \overset{\lambda\varkappa}{\mathsf{A}}_\mu = \mathsf{A}_\mu, & (\mu < \lambda,\ \mu > \varkappa). \end{cases}$$

Wir haben also das Resultat: Wenn a_λ einen Umlauf um den Punkt a_h $(h < \lambda)$ vollzieht, der den Schnitt l_h einmal im positiven Sinne überschreitet, oder wenn a_h einen Umlauf um a_λ vollzieht, der den Schnitt l_λ einmal im positiven Sinne passirt, so verwandeln sich die $y_1, \ldots, y_n$ in das durch das Schema

$$P\begin{pmatrix} a_1, \ldots, a_\sigma \\ {}^{h\lambda} \qquad\quad {}^{h\lambda} \\ \mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma \end{pmatrix} x$$

dargestellte normirte Hauptsystem

$$(8.) \qquad {}^{h\lambda}y_1, \ldots, {}^{h\lambda}y_n,$$

dessen Exponenten bei allen singulären Punkten mit den entsprechenden Exponenten von $y_1, \ldots, y_n$ übereinstimmen, und wo sich die durch die Formeln (7.) gegebenen Fundamentalsubstitutionen auf die ursprünglichen Schnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$ (Fig. 1) beziehen. Die Grössen (8.) bilden als Functionen von x ein Fundamentalsystem der linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung der *Fuchs*schen Klasse

$$(\mathrm{D}_{h\lambda}.) \qquad \frac{d^n Y}{dx^n} + {}^{h\lambda}p_1 \frac{d^{n-1} Y}{dx^{n-1}} + \cdots + {}^{h\lambda}p_n \, Y = 0,$$

deren Coefficienten aus den Coefficienten von (D.) durch den gedachten Umlauf von a_λ um a_h oder von a_h um a_λ hervorgehen. Im allgemeinen ist die Differentialgleichung $(\mathrm{D}_{h\lambda}.)$ von (D.) verschieden, d. h. die Coefficienten $p_1, \ldots, p_n$ von (D.) besitzen im allgemeinen als Functionen von a_λ die Punkte

$$a_1, \ldots, a_{\lambda-1}, a_{\lambda+1}, \ldots, a_\sigma, \infty$$

zu Verzweigungspunkten, ***nicht aber den Punkt*** x, da, wie wir gesehen haben, ein Umlauf von a_λ um x die $y_1, \ldots, y_n$ nur die Substitution A_λ erleiden lässt.

Die Gleichungen (6.) und (7.) stellen für jedes Werthepaar

$$h, \lambda = 0, 1, \ldots \sigma, \quad h < \lambda,$$

eine Operation dar, mittels deren man von dem Systeme von Fundamentalsubstitutionen $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma$ der Gruppe Θ zu einem anderen Systeme von Fundamentalsubstitutionen derselben Gruppe übergeht, und zwar ist dieser Uebergang von der Art, dass dabei jede Fundamentalsubstitution durch eine ihr ***ähnliche,*** (d. h. durch Transformation mit einer linearen Substitution der Gruppe Θ aus ihr hervorgehende) ersetzt wird; wir sagen kürzer, dass das System von Fundamentalsubstitutionen $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma$ durch ein ihm ähnliches System ersetzt wird.

Denken wir uns aus den $\frac{1}{2}\sigma(\sigma+1)$ Operationen (6.) und (7.) und deren inversen als Fundamentaloperationen eine Gruppe G componirt, so führt jede Operation von G das System von Fundamentalsubstitutionen $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma$ der Gruppe Θ in ein ihm ähnliches System über, und die Gesammtheit der Operationen von G liefert offenbar die Gesammtheit aller Systeme $\overline{\mathsf{A}}_1, \ldots, \overline{\mathsf{A}}_\sigma$, welche für alle möglichen geschlossenen Bahnen der $a_1, \ldots, a_\sigma$ an die Stelle der $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma$ treten können.

Die Gruppe G enthält diejenigen Operationen als Untergruppe I' in sich, die in der *simultanen* Transformation der $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma$ mit einer und derselben Substitution der Gruppe Θ bestehen, diese Operationen sind nämlich aus den σ Operationen (6.) und deren inversen componirt. Die Untergruppe I' ist überdies, wie man sofort übersieht, in G *ausgezeichnet* enthalten.

Die Gruppe G ist offenbar der Gruppe der Aenderungen holoedrisch isomorph, welche die $y_1, \ldots, y_n$ erfahren, wenn die $\sigma+1$ Variabeln $x, a_1, \ldots, a_\sigma$ irgendwelche geschlossene Bahnen beschreiben.

Wir bemerken noch, dass im Sinne der in der Nr. V angestellten Erwägungen die Ergebnisse der eben durchgeführten Untersuchung auch über die Frage vollständigen Aufschluss gewähren, wie die Lösungen einer beliebigen linearen Differentialgleichung der *Fuchs*schen Klasse, deren Monodromiegruppe von einem in den Coefficienten auftretenden Parameter unabhängig ist*), von diesem Parameter abhängen.

VIII.

Die in der vorigen Nummer entwickelten Resultate beziehen sich zwar unmittelbar nur auf den Fall, wo wir in einem *Riemann*schen Probleme die $a_1, \ldots, a_\sigma$ als unabhängig veränderliche Grössen und die Coefficienten der Fundamentalsubstitutionen $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma$ als von diesen unabhängige fest gegebene Constante annehmen. Ein Theil der angewandten Methoden erweist sich aber auch in allgemeineren Fällen als brauchbar, so z. B. die Methode der Deformation der Querschnitte bei geschlossenen Umläufen der $a_1, \ldots, a_\sigma$. Ohne an dieser Stelle auf die Erörterung von Fragen allgemeiner Natur, die sich an die gedachten Entwickelungen anknüpfen liessen einzugehen, wollen wir nur kurz eine Anwendung der Methode der Deformation

*) *Fuchs*, Berliner Sitzungsberichte 1888 ff.

der Querschnitte, auf die in der Nr. III betrachtete *Fuchs*sche Function $x = f(\eta)$ andeuten, um daran den Hinweis auf einen neuen Beweis, der für die Art der Abhängigkeit der $y_1, \ldots, y_n$ von den $a_1, \ldots, a_\sigma$ geltenden Regeln anzuschliessen.

Nach den Sätzen des Herrn *Poincaré**) ist innerhalb des durch die Zahlen $(g_1, \ldots, g_{\sigma+1})$ bestimmten Typus *Fuchs*scher Gruppen der ersten, zweiten, sechsten Familie vom Geschlechte Null eine besondere Gruppe ϑ und mit dieser eine zugehörige *Fuchs*sche Function $x = f(\eta)$ vollkommen eindeutig determinirt, wenn man die Werthe $a_1, \ldots, a_\sigma, a_{\sigma+1}$ vorschreibt, die diese Function in den Eckpunkten $\lambda_1, \ldots, \lambda_{\sigma+1}$ des Fundamentalbereiches annehmen soll. Wenn die Seiten des Fundamentalbereiches und die Anordnung seiner Ecken in Cyklen in bestimmter Weise gewählt sind (z. B. auf die in der Nr. I**) angegebene Weise), so sind die Schnitte

$$(a_\varkappa, a_{\sigma+1}) = l_\varkappa$$

sowohl ihrer gegenseitigen Lage als auch ihrer Gestalt nach vollkommen festgelegt. Denkt man sich nun jene Schnitte in beliebiger Weise abgeändert, so zwar, dass nicht nur ihre Gestalt und gegenseitige Lage, sondern auch die Reihenfolge, in welcher diese Schnitte bei einem positiven Umgange um den Punkt $a_{\sigma+1}$ getroffen werden verändert wird, so entspricht das nur einer sogenannten „erlaubten Abänderung" des Fundamentalbereiches***), wodurch weder die Gruppe ϑ noch die zugehörige *Fuchs*sche Function $x = f(\eta)$ irgendwie alterirt wird, nur das System der Fundamentalsubstitutionen $A_1, \ldots, A_\sigma$ der Gruppe ϑ kann eventuell durch ein ihm (im oben festgesetzten Sinne) ähnliches ersetzt worden sein und überdies eine Abänderung in der Reihenfolge erfahren haben. Wenn wir erlaubte Abänderungen des Fundamentalbereiches, die nur in einer continuirlichen Deformation der Seiten bestehen, also keine Aenderung der Fundamentalsubstitutionen bedingen, als unwesentlich ansehen, so bildet die Gesammtheit aller wesentlichen Abänderungen eine Gruppe H†), von der sich leicht zeigen lässt††),

---

*) Acta Mathematica Bd. IV; vergl. auch dieses Journal Bd. 110, S. 288 u. *A1*, S. 158.

**) *A1*, S. 144.

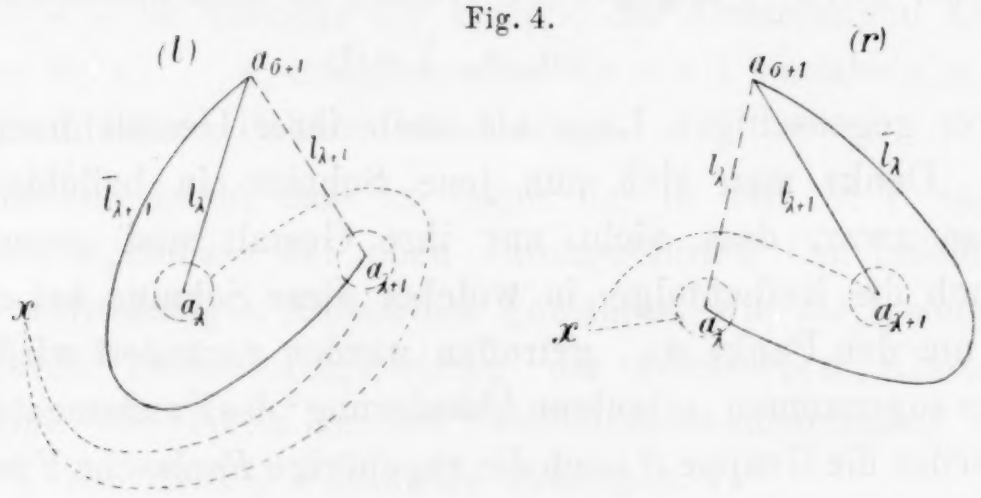
***) Ausführlich studirt in *Fricke-Klein* „Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen", Bd. I (1897) 1. Abschnitt, Kap. 2, vergl. besonders S. 299 ff.

†) In etwas anderer Form kommt diese Gruppe bei Herrn *Poincaré*, Acta Mathematica Bd. IV, S. 222 vor; vergl. auch *H. Vogt*, Thèses (Paris 1889) S. 30.

††) Vergl. *Fricke-Klein*, a. a. O. S. 304.

dass sie aus gewissen Operationen als Fundamentaloperationen erzeugt werden kann. Diese Fundamentaloperationen lassen sich wie folgt charakterisiren: Gehen wir von einer bestimmten Reihenfolge und Lage der Schnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$ aus (etwa von der in der Fig. 1 angedeuteten, wo man sich den Schnitt l_0 vorläufig wegdenken mag), dann erhalten wir Operationen von H, wenn wir die Reihenfolge zweier Schnitte z. B. $l_\lambda, l_{\lambda+1}$ vertauschen. Dies kann in zwiefacher Weise geschehen, entweder indem man l_λ unverändert lässt und $l_{\lambda+1}$ über l_λ (also nach links) hinüberschlägt, oder indem man $l_{\lambda+1}$ unverändert lässt und l_λ über $l_{\lambda+1}$ (also nach rechts) hinüberschlägt (siehe Fig. 4, (l) und (r)). Man überzeugt sich durch Betrachtung der von x aus über die neuen Lagen der Schnitte hinweggelegten einfachen Schleifen (in der Fig. 4 punktirt) sofort, dass in den beiden Fällen A_λ, $A_{\lambda+1}$ durch

Fig. 4.



$$(1l.) \qquad A_{\lambda+1}\, A_\lambda\, A_{\lambda+1}^{-1}, \quad A_{\lambda+1},$$

beziehungsweise durch

$$(1r.) \qquad A_\lambda, \quad A_\lambda^{-1}\, A_{\lambda+1}\, A_\lambda$$

ersetzt und überdies in ihrer Reihenfolge vertaucht werden.

Diese Operationen sind die Fundamentaloperationen der Gruppe H. Diejenigen Operationen von H, die Aenderungen der Schnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$, wie sie durch Umläufe der $a_1, \ldots, a_\sigma$ um einander und um x hervorgerufen werden, entsprechen, bilden eine ausgezeichnete Untergruppe h von H, und h ist offenbar mit der am Schlusse der vorigen Nummer betrachteten Gruppe G holoedrisch isomorph. Die Aenderungen der $A_1, \ldots, A_\sigma$, die bestimmten Umläufen der $a_1, \ldots, a_\sigma$ entsprechen, lassen sich leicht aus den Fundamentaloperationen $(1l.)$ und $(1r.)$ für $\lambda = 1, 2, \ldots, \sigma$ zusammensetzen.

Denken wir uns nun die $y_1, \ldots, y_n$ durch ein System *Fuchs*scher Zetaformen von der Gestalt (4.) Nr. I:

$$(2.) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} T_\nu^{-1}\, \varphi_\varkappa\,(S_\nu\, u_1,\, S_\nu\, u_2) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$$

dargestellt, so wird bei Umläufen der $a_1, \ldots, a_\sigma$ auf die $A_1, \ldots, A_\sigma$ eine Operation der Gruppe h ausgeübt, was einer ganz bestimmten Permutation der Substitutionen S_ν der *Fuchs*schen Gruppe ϑ entspricht, während die Gruppe Θ unverändert bleibt, so dass also eine Abänderung in der isomorphen Zuordnung der Substitutionen der Gruppen ϑ und Θ eintritt. Wenn man diese Abänderung verfolgt, so findet man z. B., dass nach einem einfachen positiven Umlaufe von a_λ um x beziehungsweise a_h $(h < \lambda)$ den Fundamentalsubstitutionen $A_1, \ldots, A_\sigma$ von ϑ statt der $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma$ die durch die Formeln (6.) beziehungsweise (7.) der Nr. VII gegebenen Substitutionen von Θ zuzuordnen sind. Ersetzt man in jedem Falle in den Reihen (2.) die einer Substitution S_ν von ϑ entsprechende Substitution T_ν von θ durch die ihr in der neuen isomorphen Zuordnung entsprechende, so erhält man ein System von Zetaformen, welches unmittelbar dasjenige Functionssystem liefert, in welches die $y_1, \ldots, y_n$ durch die betrachteten Umläufe der $a_1, \ldots, a_\sigma$ übergegangen sind.

IX.

Die Operationen (6.) Nr. VII der Gruppe G haben die besondere Eigenschaft, dass das neue System von Fundamentalsubstitutionen

$$\overset{0\lambda}{\mathsf{A}}_1, \ldots, \overset{0\lambda}{\mathsf{A}}_\sigma$$

aus den $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma$ durch Transformation mit einer und derselben linearen Substitution (nämlich A_λ) hervorgeht. Die gleiche Eigenschaft kommt überhaupt jeder Operation der in G ausgezeichnet enthaltenen Untergruppe Γ zu.

Wenn allgemein eine Operation von G, die $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma$ durch das ähnliche System von Fundamentalsubstitutionen $\overline{\mathsf{A}}_1, \ldots, \overline{\mathsf{A}}_\sigma$ ersetzt, die Eigenschaft hat, dass eine lineare Substitution B mit nicht verschwindender Determinante existiert, welche die $\mathsf{A}_\varkappa$ *simultan* in die $\overline{\mathsf{A}}_\varkappa$ transformirt, so dass also

$$\mathsf{B}\, \mathsf{A}_\varkappa\, \mathsf{B}^{-1} = \overline{\mathsf{A}}_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, \sigma),$$

so wollen wir*) sagen, die betreffende Operation von G werde durch die lineare Substitution B *inducirt*. Die inducirende Substitution (der *Inductor*)

---

*) Anlehnend an eine von *Sylvester*, dieses Journal, Bd. 85, S. 90, in anderem Sinne benutzte, neuerdings von Herrn *G. Rados*, Math. Berichte aus Ungarn, Bd. 16, S. 243, wieder aufgenommene Bezeichnung.

hat dann offenbar die Eigenschaft, jede Substitution der Gruppe Θ in eine Substitution derselben Gruppe zu transformiren, die Existenz einer solchen Substitution B bedingt also einen ***Isomorphismus*** der Gruppe Θ ***in sich selbst.****)

Wir wollen nun insbesondere annehmen, dass die Operation (7.) Nr. VII von G durch eine lineare Substitution $\mathsf{B}_{h\lambda}$ inducirt werde, so dass also eine lineare Substitution $\mathsf{B}_{h\lambda}$ existirt, für die

$$\mathsf{B}_{h\lambda}\,\mathsf{A}_i\,\mathsf{B}_{h\lambda}^{-1} = \overset{h\lambda}{\mathsf{A}}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \sigma) \tag{1.}$$

ist. Die Existenz der Substitution $\mathsf{B}_{h\lambda}$, welche die σ symbolischen Gleichungen (1.) gleichzeitig erfüllt, involvirt eine einschneidende Beschränkung für die Coefficienten der Substitutionen

$$\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_\sigma.$$

Schreiben wir die Gleichungen (1.) in der Form

$$\mathsf{B}_{h\lambda}\,\mathsf{A}_i = \overset{h\lambda}{\mathsf{A}}_i\,\mathsf{B}_{h\lambda},$$

so erkennt man, dass sie ein System linearer homogener Gleichungen für die Coefficienten von $\mathsf{B}_{h\lambda}$ liefern, welches, allgemein zu reden, weit mehr Gleichungen enthält, als zur Bestimmung der n^2 Coefficienten von $\mathsf{B}_{h\lambda}$ erforderlich sind. Damit diese Gleichungen mit einander verträglich seien, müssen also die Coefficienten der $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma$ gewisse Bedingungsgleichungen erfüllen. Sind diese erfüllt, gestatten also die durch (1.) repräsentirten linearen homogenen Gleichungen für die Coefficienten von $\mathsf{B}_{h\lambda}$ eine Auflösung, für welche die Determinante von $\mathsf{B}_{h\lambda}$ nicht verschwindet, so wollen wir sagen, die aus den $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma$ als Fundamentalsubstitutionen gebildete Gruppe Θ besitze *in Bezug auf das Indexpaar* (h, λ) einen Isomorphismus in sich.

Wenn dann $\mathsf{B}_{h\lambda}$ eine bestimmte Substitution (mit nicht verschwindender Determinante) ist, die die Gleichungen (1.) erfüllt, so wird offenbar auch jede Substitution, die aus $\mathsf{B}_{h\lambda}$ durch Multiplication aller Elemente mit einem gemeinsamen Factor hervorgeht, den Gleichungen (1.) Genüge thun. Wir behaupten aber, *dass ausser diesen keine andere Substitution* $\overline{\mathsf{B}}_{h\lambda}$ *existiren kann, die ebenfalls die Gleichungen* (1.) *befriedigt, wenn nicht die aus den* $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma$ *als Fundamentalsubstitutionen componirte Gruppe reductibel ist.***)

---

*) Vergl. für diese Bezeichnung *W. v. Dyck,* Mathematische Annalen Bd. 20, S. 10, *O. Hölder* ebenda, Bd. 43, S. 313.

**) In dem im Handbuch, Bd. II, 1, S. 104 angegebenen Sinne; *pas primaire* in der Bezeichnung von Herrn *Camille Jordan*, Cours d'Analyse, Bd. III (1896), S. 195.

Wir führen den Beweis dieses rein gruppentheoretischen Satzes durch eine analytische Betrachtung.

Wäre eine Substitution $\overline{\mathsf{B}}_{h\lambda}$ vorhanden, die sich von $\mathsf{B}_{h\lambda}$ nicht nur durch einen gemeinsamen Factor aller Elemente unterscheidet, so würden die beiden Functionssysteme

$$\mathsf{B}_{h\lambda}\, y_\varkappa \quad \text{und} \quad \overline{\mathsf{B}}_{h\lambda}\, y_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.}$$

sich nicht nur durch einen gemeinsamen constanten Factor unterscheiden. Die beiden Functionssysteme (2.) stellen aber Fundamentalsysteme der Differentialgleichung (D.) dar, die, dem Schnittsysteme $l_1, \ldots, l$ (Fig. 1) entsprechend, die Fundamentalsubstitutionen

$$\overset{h\lambda}{\mathsf{A}}_1, \ldots, \overset{h\lambda}{\mathsf{A}}_\sigma$$

aufweisen und folglich zu derselben Klasse (im Sinne *Riemanns*) gehören. Es muss also eine Beziehung von der Form

$$z = P_0 y + P_1 \frac{dy}{dx} + \cdots + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}$$

mit in x rationalen Coefficienten $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ erfüllt sein, wenn man für z die Elemente des Systems $\overline{\mathsf{B}}_{h\lambda}\, y_\varkappa$, für y die entsprechenden Elemente des Systems $\mathsf{B}_{h\lambda}\, y_\varkappa$ einsetzt. Daraus folgt aber, dass z ein Integral von (D.) darstellt, wenn für y irgend ein Integral dieser selben Differentialgleichung gesetzt wird, und dies bedingt nach einem bekannten Satze des Herrn *Frobenius**) die Reductibilität der Differentialgleichung (D.) also auch die ihrer Monodromiegruppe Θ.

Es könnte nur noch die Frage entstehen, ob ein solcher Isomorphismus der Gruppe Θ in sich selbst überhaupt für eine irreductible Gruppe möglich ist. Diese Frage ist aber zu bejahen, da sich, wie wir im

---

*) Dieses Journal Bd. 76, S. 268. Im Grunde genommen ist der Satz des Herrn ***Frobenius, wie überhaupt jeder Reductibilitätssatz***, ein rein gruppentheoretischer. Für die aus den Fundamentalsubstitutionen $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma$ componirte Gruppe Θ ausgesprochen, lautet dieser Satz in gruppentheoretischem Gewande so: „Wenn eine nicht rein multiplicative lineare Substitution B mit nicht verschwindender Determinante existirt, welche jede der Substitutionen $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma$ in sich selbst transformirt, oder, was dasselbe heisst, mit allen Substitutionen von Θ vertauschbar ist, so ist die Gruppe Θ reductibel." Diese Art von Isomorphismus einer Gruppe Θ in sich selbst, wo also jede Substitution von Θ durch den Inductor in sich selbst transformirt wird, kommt in der *Lie*schen Theorie der Transformationsgruppen allein in Betracht; vergl. *Maurer*, Encyklopädie der mathem. Wissenschaften Bd. II, Heft 4, S. 414.

Folgenden sehen werden, Beispiele irreductibler, aus σ Fundamentalsubstitutionen componirter Gruppen angeben lassen, die nicht nur in Bezug auf ein Indexpaar (h, λ), sondern in Bezug auf alle möglichen Paare von Indices

$$(h, \lambda) \qquad (h, \lambda = 1, 2, \ldots, \sigma;\ h < \lambda)$$

Isomorphismus in sich selbst darbieten.

Der für die besondere Operation (7.) Nr. VII der Gruppe G bewiesene Satz gilt offenbar auch allgemein, d. h.:

Die Existenz einer linearen Substitution mit nicht verschwindender Determinante, die eine bestimmte Operation von G inducirt, bedingt die Existenz von Relationen zwischen den Coefficienten der Fundamentalsubstitutionen $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma$, die erfüllbar sind, ohne dass die Gruppe Θ reductibel wird. Sind diese Relationen erfüllt und ist die Gruppe Θ irreductibel, so geht jede die betreffende Operation von G inducirende lineare Substitution aus einer solchen durch Multiplication aller Elemente mit einem gemeinsamen Factor hervor. ***Wenn wir also,*** was im Folgenden stets geschehen soll, ***den Inductor unimodular voraussetzen, so ist er, falls er existirt und Θ irreductibel ist, eindeutig determinirt und seine Coefficienten sind von den $a_1, \ldots, a_\sigma$ unabhängige Grössen,*** da ja die zur eindeutigen Bestimmung dieser Coefficienten dienenden Gleichungen, wegen der Unabhängigkeit der

$$\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma$$

von den $a_1, \ldots, a_\sigma$, diese letzteren Grössen überhaupt nicht enthalten.

Wir setzen im Folgenden die Gruppe Θ stets als irreductibel voraus.

Falls der Inductor $\mathsf{B}_{h\lambda}$ für die Operation (7.) Nr. VII der Gruppe G existirt, so gehört das Functionssystem von x

$$\mathsf{B}_{h\lambda}\, y_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n) \tag{3.}$$

mit dem durch das Schema

$$P\begin{pmatrix} a_1, \ldots, a_\sigma & \\ h\lambda \qquad\quad h\lambda & x \\ \mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma & \end{pmatrix} \tag{4.}$$

repräsentirten normirten Hauptsysteme $\overset{h\lambda}{y}_1, \ldots \overset{h\lambda}{y}_n$ zu derselben Klasse, und die Systeme (3.), (4.) besitzen bei allen wesentlichen singulären Stellen $a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$ dieselben Exponenten, sie können sich folglich nur durch einen allen gemeinsamen Factor unterscheiden.*)

*) Dieser Schluss, der sich auf die in der Nr. IV (*A 1*, S. 167, 168) vorgenommene Constantenzählung stützt, kann in gewissen Ausnahmefällen seine Gültigkeit

Da aber $\mathsf{B}_{h\lambda}$ unimodular vorausgesetzt wird, besitzt die Determinante des Functionssystems (3.) für $x = x_0$ denselben Werth wie die Determinante von $y_1, \ldots, y_n$, d. h. (vergl. Nr. VI) den Werth Eins; (3.) ist also selbst das normirte Hauptsystem und folglich mit dem Systeme (4.) völlig übereinstimmend. Wir haben also den Satz:

Wenn die Gruppe Θ in Bezug auf das Indexpaar (h, λ) einen Isomorphismus in sich besitzt und $\mathsf{B}_{h\lambda}$ den zugehörigen unimodularen Inductor bedeutet, so erleidet das normirte Hauptsystem $y_1, \ldots, y_n$ durch einen einfachen positiven Umlauf von a_λ um a_h oder von a_h um a_λ die lineare Substitution $\mathsf{B}_{h\lambda}$, deren Coefficienten von $x, a_1, \ldots, a_\sigma$ unabhängig sind. Daraus folgt, dass in diesem Falle die Differentialgleichungen (D.) und ($\mathrm{D}_{h\lambda}$.) mit einander identisch sind.

Möge nun die Gruppe Θ so beschaffen sein, dass sie für alle Indexpaare

$$(1, \lambda), \ldots, (\lambda-1, \lambda),\ (\lambda, \lambda+1), \ldots, (\lambda, \sigma)$$

Isomorphismus in sich selbst zulässt, und seien

$$\mathsf{B}_{1\lambda}, \cdots, \mathsf{B}_{\lambda-1,\lambda},\ \mathsf{B}_{\lambda,\lambda+1}, \cdots, \mathsf{B}_{\lambda,\sigma}$$

die entsprechenden unimodularen Inductoren; der Gleichmässigkeit wegen setzen wir noch

$$\mathsf{A}_\lambda = \mathsf{B}_{0\lambda}.$$

Wenn dann a_λ einfache positive Umläufe um die Punkte

$$x,\ a_1, \ldots, a_{\lambda-1},\ a_{\lambda+1}, \ldots, a_\sigma$$

vollzieht, so erfahren die $y_1, \ldots, y_n$ die entsprechende lineare unimodulare Substitution $\mathsf{B}_{i\lambda}$; in diesem Falle sind also die sämmtlichen Differentialgleichungen

$$(\mathrm{D}_{1\lambda}.), \ldots, (\mathrm{D}_{\lambda\sigma}.)$$

mit (D.) identisch, d. h. *die Coefficienten* $p_1, \ldots, p_n$ *von* (D.) *sind eindeutige Functionen von* a_λ.

Ebenso sind alsdann auch die in x rationalen Coefficienten der Relationen

$$(5.) \qquad \frac{\partial^i y_\varkappa}{\partial a_\lambda^i} = B_{\lambda 0}^{(i)} y_\varkappa + B_{\lambda 1}^{(i)} \frac{dy_\varkappa}{dx} + \cdots + B_{\lambda, n-1}^{(i)} \frac{d^{n-1} y_\varkappa}{dx^{n-1}},$$

$$(\varkappa = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

denen die successiven partiellen Derivirten der $y_\varkappa$ nach a_λ zufolge des in der Nr. VII angeführten *Fuchs*schen Satzes Genüge leisten, eindeutige

---

verlieren. Ein solcher Ausnahmefall ereignet sich z. B., wenn alle $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma$ mit einander vertauschbar sind. Ohne hier auf eine genaue Discussion dieser Ausnahmen einzugehen, bemerken wir nur, dass dieselben nur für reductible Gruppen Θ eintreten können, so dass wir also im Texte, wo wir Θ als irreductibel voraussetzen, von den Ausnahmefällen absehen dürfen.

Functionen von a_λ, die $y_1, \ldots, y_n$ befriedigen folglich*) in diesem Falle als Functionen von a_λ, eine homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$(D_\lambda.) \qquad \frac{d^n y}{d a_\lambda^n} + p_{\lambda 1} \frac{d^{n-1} y}{d a_\lambda^{n-1}} + \cdots + p_{\lambda n} y = 0$$

mit in a_λ eindeutigen, in x rationalen Coefficienten und den wesentlichen singulären Punkten

$$x,\ a_1, \ldots, a_{\lambda-1},\ a_{\lambda+1}, \ldots, a_\sigma, \infty.$$

Die Monodromiegruppe Θ_λ der Differentialgleichung $(D_\lambda.)$ in Beziehung auf das Fundamentalsystem $y_1, \ldots, y_n$ ist aus den σ Substitutionen

$$(6.) \qquad \mathsf{B}_{0\lambda},\ \mathsf{B}_{1\lambda}, \ldots, \mathsf{B}_{\lambda-1,\lambda},\ \mathsf{B}_{\lambda,\lambda+1}, \ldots, \mathsf{B}_{\lambda,\sigma}$$

als Fundamentalsubstitutionen componirt, sie ist folglich von den in den Coefficienten von $(D_\lambda.)$ als Parametern enthaltenen Grössen

$$(7.) \qquad x,\ a_1, \ldots, a_{\lambda-1},\ a_{\lambda+1}, \ldots, a_\sigma$$

unabhängig.

Wir machen nun die weitere Voraussetzung, dass die σ Substitutionen (6.) die ***Convergenzbedingungen*** erfüllen.

Dann können wir auf die Differentialgleichung $(D_\lambda.)$ das Theorem I. unserer Notiz**) anwenden. D. h. wenn wir mit

$$(8.) \qquad y_{\lambda 1}, \ldots, y_{\lambda n}$$

ein System von Functionen der unabhängigen Variabeln a_λ bezeichnen, welches das durch die singulären Punkte

$$x,\ a_1, \ldots, a_{\lambda-1},\ a_{\lambda+1}, \ldots, a_\sigma, \infty$$

und die zu den Schnitten

$$l_0, l_1, \ldots, l_{\lambda-1},\ l_{\lambda+1}, \ldots, l_\sigma$$

(wie sie die Fig. 1 veranschaulicht) gehörigen Fundamentalsubstitutionen (6.) bestimmte ***Riemann***sche Problem löst, so stellen sich die $y_1, \ldots, y_n$ in der Form

$$(9.) \qquad y_\varkappa = \overset{\lambda}{r}_{00}\, y_{\lambda\varkappa} + \overset{\lambda}{r}_{01} \frac{d y_{\lambda\varkappa}}{d a_\lambda} + \cdots + \overset{\lambda}{r}_{0,n-1} \frac{d^{n-1} y_{\lambda\varkappa}}{d a_\lambda^{n-1}} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$$

dar, wo die $\overset{\lambda}{r}_{00}, \overset{\lambda}{r}_{01}, \ldots, \overset{\lambda}{r}_{0,n-1}$ eindeutige Functionen von a_λ bedeuten.

---

*) Siehe ***Fuchs***, Berliner Sitzungsberichte 1891, S. 164ff., vergl. auch die während der Drucklegung der vorliegenden Arbeit erschienene Abhandlung des Herrn ***Richard Fuchs***: „Ueber lineare homogene Differentialgleichungen, deren Substitutionsgruppe von einem in den Coefficienten auftretenden Parameter unabhängig ist", Beilage zum Programm des Bismarck-Gymnasiums, Dt.-Wilmersdorf, 1902, S. 13ff.

**) Dieses Journal, Bd. 124, S. 53, 54.

Wählen wir das Functionssystem (8.) von vornherein als ein normirtes Hauptsystem, so gelten für dieses Functionssystem von a_λ dieselben Sätze, die wir für das Functionssystem $y_1, \ldots, y_n$ von x entwickelt haben, nur haben die Grössen x und a_λ ihre Rollen vertauscht und an die Stelle der Gruppe Θ ist die Gruppe Θ_λ getreten. Insbesondere genügen die Functionen (8.) als Functionen von x aufgefasst einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit in x eindeutigen Coefficienten, sie lassen sich also zu Folge des Theorems I. unserer erwähnten Notiz in der Form

$$y_{\lambda\varkappa} = \overset{0}{r}_{00}\, y_\varkappa + \overset{0}{r}_{01} \frac{dy_\varkappa}{dx} + \cdots + \overset{0}{r}_{0,n-1} \frac{d^{n-1} y_\varkappa}{dx^{n-1}} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$$

darstellen, wo die $\overset{0}{r}_{00}, \overset{0}{r}_{01}, \ldots, \overset{0}{r}_{0,n-1}$ eindeutige Functionen von x bedeuten.

Fassen wir die Ergebnisse der bisherigen Untersuchung zusammen, so können wir sagen:

„Unter der Voraussetzung, dass die mit den Substitutionen $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma$ als Fundamentalsubstitutionen erzeugte Gruppe Θ irreductibel ist und in Bezug auf die $\sigma - 1$ Indexpaare

$$(1, \lambda), \ldots, (\lambda - 1, \lambda), (\lambda, \lambda + 1), \ldots, (\lambda, \sigma)$$

Isomorphismen in sich selbst darbietet, dass ferner die diesen Isomorphismen entsprechenden Inductoren (6.) ebenso wie die $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma$ selbst den Convergenzbedingungen genügen, führt das durch die singulären Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ und die Fundamentalsubstitutionen $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma$ bestimmte *Riemann*sche Problem mit der unabhängigen Variabeln x auf Systeme von Functionen der beiden Variabeln x, a_λ von folgender Beschaffenheit.

Ein solches System befriedigt als Functionssystem von x eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit in x und a_λ eindeutigen Coefficienten und den wesentlichen singulären Punkten

$$a_1, \ldots, a_\sigma, \infty,$$

deren Monodromiegruppe Θ von den $a_1, \ldots, a_\sigma$ unabhängig ist und als Functionssystem von a_λ ebenfalls eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit in x und a_λ eindeutigen Coefficienten und den wesentlichen singulären Punkten

$$x,\ a_1, \ldots, a_{\lambda-1},\ a_{\lambda+1}, \ldots, a_\sigma, \infty,$$

deren Monodromiegruppe Θ_λ von den $x,\ a_1, \ldots, a_{\lambda-1},\ a_{\lambda+1}, \ldots, a_\sigma$ unabhängig ist. Insbesondere lassen sich zwei Systeme

$$y_1, \ldots, y_n \qquad \text{und} \qquad y_{\lambda 1}, \ldots, y_{\lambda n}$$

derart auswählen, dass die lineare Differentialgleichung, der die $y_1, \ldots, y_n$ als Functionen von x und die lineare Differentialgleichung, der die $y_{\lambda 1}, \ldots, y_{\lambda n}$ als Functionen von a_λ genügen zur *Fuchs*schen Klasse gehören, und durch diese beiden Systeme ist dann jedes andere System in der Form

$$\left.\begin{aligned} &\overset{0}{r}_{00}\, y_\varkappa + \overset{0}{r}_{01}\, \frac{dy_\varkappa}{dx} + \cdots + \overset{0}{r}_{0,n-1}\, \frac{d^{n-1} y_\varkappa}{dx^{n-1}} \\ &\overset{\lambda}{r}_{00}\, y_{\lambda\varkappa} + \overset{\lambda}{r}_{01}\, \frac{dy_{\lambda\varkappa}}{da_\lambda} + \cdots + \overset{\lambda}{r}_{0,n-1}\, \frac{d^{n-1} y_{\lambda\varkappa}}{da_\lambda^{n-1}} \end{aligned}\right\} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$$

darstellbar, wo die

$$\overset{0}{r}_{00}, \overset{0}{r}_{01}, \ldots, \overset{0}{r}_{0,n-1}, \quad \overset{\lambda}{r}_{00}, \overset{\lambda}{r}_{01}, \ldots, \overset{\lambda}{r}_{0,n-1}$$

eindeutige Functionen von x und a_λ bedeuten.

Bilden wir aus den Substitutionen

$$\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma, \quad \mathsf{B}_{1\lambda}, \ldots, \mathsf{B}_{\lambda-1,\lambda}, \mathsf{B}_{\lambda,\lambda+1}, \ldots, \mathsf{B}_{\lambda,\sigma}$$

als Fundamentalsubstitutionen eine Gruppe $\Theta_{0+\lambda}$, so sind in dieser alle linearen Substitutionen enthalten, die ein Functionssystem der betrachteten Art erleidet, wenn x und a_λ irgendwelche geschlossene Bahnen beschreiben. Die Gruppen Θ und Θ_λ sind in $\Theta_{0+\lambda}$ als ausgezeichnete Untergruppen enthalten.

In dieser Form der Aussage treten die beiden Variabeln x und a_λ als mit einander völlig gleichberechtigte Elemente auf, und es kann gewissermassen als zufälliger Umstand gelten, dass wir bei der Definition der in Rede stehenden Functionssysteme gerade von dem auf die unabhängige Variable x bezüglichen *Riemann*schen Probleme ausgegangen sind.

Als das wesentlichste Resultat möchten wir hervorheben, dass die Eigenschaft des durch das ursprüngliche *Riemann*sche Problem definirten normirten Hauptsystems $y_1, \ldots, y_n$, als Functionssystem von a_λ einer linearen Differentialgleichung mit in a_λ eindeutigen Coefficienten zu genügen, *allein* in der Beschaffenheit der Fundamentalsubstitutionen $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma$ wurzelt, nämlich in der Eigenschaft der aus diesen Substitutionen componirten Gruppe Θ, irreductibel zu sein und in Bezug auf alle $\sigma - 1$ Indexpaare, die den Index λ enthalten, Isomorphismen in sich zu besitzen.

Wir gehen nun noch einen letzten Schritt weiter, indem wir voraussetzen, dass die aus den $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma$ componirte Gruppe Θ in Bezug auf alle $\frac{\sigma(\sigma-1)}{2}$ Indexpaare

$$(h, \lambda) \qquad (h, \lambda = 1, 2, \ldots, \sigma;\ h < \lambda)$$

Isomorphismen in sich selbst besitzt. Es gelten dann in Bezug auf alle singulären Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ die vorhin für a_λ entwickelten Sätze. Wenn wir noch die weitere Voraussetzung machen, dass alle Systeme der unimodularen Inductoren $\mathsf{B}_{h\lambda}$, die aus dem Systeme (6.) für $\lambda = 1, 2, \ldots, \sigma$ hervorgehen, die Convergenzbedingungen erfüllen, so haben wir also Systeme von n Functionen der $\sigma + 1$ unabhängigen Variabeln

$$x, a_1, \ldots, a_\sigma$$

mit den folgenden Eigenschaften:

„Setzen wir der Gleichmässigkeit wegen $x = a_0$, so befriedigen unsere Functionssysteme als Functionen irgend eines a_λ $(\lambda = 0, 1, \ldots, \sigma)$ eine lineare homogene Differentialgleichung, deren Coefficienten eindeutige Functionen aller $a_0, a_1, \ldots, a_\sigma$ sind, die zu wesentlichen singulären Punkten die Punkte $a_k, k \neq \lambda$, und ∞ besitzt und deren Monodromiegruppe Θ_λ von diesen singulären Punkten unabhängig ist. Bilden wir aus den Substitutionen

$$\mathsf{B}_{h\lambda} \qquad (h, \lambda = 0, 1, \ldots, \sigma;\ h < \lambda)$$

als Fundamentalsubstitutionen eine Gruppe $\Theta_{\sigma+1}$, so ist diese Gruppe mit der am Schlusse der Nr. VII definirten Gruppe G in dem Sinne holoedrisch isomorph, dass jede Substitution von $\Theta_{\sigma+1}$ den Inductor liefert, durch den die entsprechende Operation von G inducirt wird. Die Gruppen

$$\Theta_\lambda \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, \sigma;\ \Theta_0 = \Theta)$$

sind in der Gruppe $\Theta_{\sigma+1}$ als ausgezeichnete Untergruppen enthalten.

Insbesondere können $\sigma + 1$ Systeme

$$(9.) \qquad y_{\lambda 1}, \cdots, y_{\lambda n} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, \sigma)$$

so ausgewählt werden, dass die $y_{\lambda 1}, \ldots, y_{\lambda n}$ als Functionssystem von a_λ eine Differentialgleichung der *Fuchs*schen Klasse befriedigen, und es lassen sich dann alle anderen Systeme durch diese $\sigma + 1$ speciellen in der Form

$$\overset{\lambda}{r}_{00}\, y_{\lambda\varkappa} + \overset{\lambda}{r}_{01} \frac{dy_{\lambda\varkappa}}{da_\lambda} + \cdots + \overset{\lambda}{r}_{0,n-1} \frac{d^{n-1} y_{\lambda\varkappa}}{da_\lambda^{n-1}}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$$

$$(\lambda = 0, 1, \ldots, \sigma)$$

darstellen, wo die Coefficienten eindeutige Functionen der $\sigma + 1$ Variabeln $a_0, a_1, , \ldots, a_\sigma$ bedeuten. Unter Umständen können einige der $\sigma + 1$ Specialsysteme (9.) mit einander identisch sein.“*)

---

*) Vergl. über solche Functionssysteme ***Fuchs*** a. a. O.; specielle Fälle bei ***Horn***, Acta Mathematica Bd. XII, S. 113 ff., Habilitationsschrift (Freiburg 1890), und bei den am Schlusse der folgenden Nummer zu nennenden Autoren.

Functionssysteme dieser Art mögen wohl *Riemann* vorgeschwebt haben, als er die später von ihm selbst als „nicht richtig“ bezeichneten, in dem Abdrucke des Fragments*) mit kleinerem Druck wiedergegebenen Zeilen niederschrieb. Wollte man versuchen, dem Gedankengange nachzuspüren, der *Riemann* zu der später von ihm selbst verworfenen Anschauung geführt haben mochte, dass die durch das allgemeine *Riemann*sche Problem mit den singulären Punkten $a, b, \ldots, g$ und den Fundamentalsubstitutionen $A, B, \ldots, G$ determinirten Grössen y „ein ähnliches System von Functionen, wie von x auch von a bilden, mit den Verzweigungswerthen $b, c, d, \ldots, g, x$ und Substitutionen, die aus $(A), (B), \ldots, (F)$ zusammengesetzt sind“**), so wird man wohl kaum fehl gehen, wenn man annimmt, dass *Riemann* im ersten Augenblicke übersehen hat, dass die von ihm***) als Querschnitt eingeführte, die Punkte $a, b, \ldots, g$ verbindende geschlossene Linie Deformationen erfährt, wenn die $a, b, \ldots, g$ geschlossene Bahnen beschreiben, und dass durch diese Deformationen der Charakter der Grössen y vollständig verändert wird.

X.

Wir haben nun noch den Nachweis zu führen, dass Gruppen von der Beschaffenheit, wie wir sie in der vorigen Nummer für die aus den $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma$ als Fundamentalsubstitutionen componirte Gruppe Θ supponirt haben, thatsächlich existiren. Dieser Nachweis wird erbracht sein, wenn es gelingt, ein Beispiel solcher Gruppen anzugeben. Zu diesem Ende haben wir nur die in der Litteratur vielfach behandelte *Tissot-Pochhammer*sche Differentialgleichung ins Auge zu fassen, mit der wir uns selbst bereits†) beschäftigt haben. Es sei gestattet, die auf diese Differentialgleichung bezüglichen Formeln, soweit wir sie für den vorliegenden Zweck nöthig haben, übersichtlich zusammenzustellen.

Für die in Fig. 1 angedeutete Lage der Schnitte

$$l_0, l_1, \ldots, l_\sigma$$

bedeute s_k eine von einem regulären Punkte ζ der Ebene E aus um den Punkt a_k

*) Werke S. 385, 396.

**) a. a. O. S. 385 die fünf letzten Zeilen des Textes.

***) a. a. O. S. 379 letzte Zeile bis S. 380 Zeile 5 v. o.

†) Dieses Journal Bd. 116, S. 119 ff.; Bd. 117, S. 161 ff.; vergl. auch Handbuch Bd. II, 1, S. 455 ff., woselbst die Litteratur zusammengestellt ist.

herumgelegte einfache Schleife, die den Schnitt l_k einmal im positiven Sinne überschreitet. (Dabei ist $x = a_0$ zu nehmen). Wir setzen

$$I_g = \int_{(sg)} (z-a_0)^{\beta_0-1}(z-a_1)^{\beta_1-1}\dots(z-a_\sigma)^{\beta_\sigma-1}\,dz \qquad (g=0,1,\dots,\sigma)$$

und betrachten die Aenderungen, die diese Integrale erfahren, wenn a_λ einen einfachen positiven Umlauf um a_h $(h<\lambda)$ oder a_k $(k>\lambda)$ vollzieht. Man findet diese am einfachsten, indem man wie in der Nr. VII die Deformationen verfolgt, die die Schnitte $l_0, l_1, \dots, l_\sigma$ bei dem gedachten Umlaufe erleiden und dann die einfachen Schleifen $\bar{s}_g$, die von ζ aus um a_g so herumgelegt sind, dass sie die neuen Lagen $\bar{l}_g$ der Schnitte einmal im positiven Sinne überschreiten, dadurch durch die alten Schleifen s_g ausdrückt, dass man nachsieht, wie oft und in welchem Sinne die $\bar{s}_g$ die alten Schnitte $l_0, l_1, \dots, l_\sigma$ passiren. Bezeichnet man mit

$$\overset{h\lambda}{I}_g \qquad (g=0,1,\dots,\sigma;\ h<\lambda)$$

den Ausdruck, in den sich I_g verwandelt, wenn a_λ den einfachen positiven Umlauf um a_h (oder q. i. e. a_h den einfachen positiven Umlauf um a_λ) vollzieht, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}
\overset{h\lambda}{I}_h &= (1-\varepsilon_h)I_\lambda + \varepsilon_\lambda I_h,\\
\overset{h\lambda}{I}_\nu &= (1-\varepsilon_h)(1-\varepsilon_\nu)I_\lambda - (1-\varepsilon_\lambda)(1-\varepsilon_\nu)I_h + I_\nu, \qquad (\nu = h+1,\dots\lambda-1),\\
\overset{h\lambda}{I}_\lambda &= (1+\varepsilon_h\varepsilon_\lambda-\varepsilon_\lambda)I_\lambda + (\varepsilon_\lambda-\varepsilon_\lambda^2)I_h,\\
\overset{h\lambda}{I}_\mu &= I_\mu, \qquad (\mu = 0,1,\dots,h-1,\lambda+1,\dots\sigma),
\end{aligned}$$

wo

$$\varepsilon_g = e^{2\pi i\beta_g} \qquad (g=0,1,\dots,\sigma)$$

gesetzt wurde.

Die Ausdrücke

$$y_g = (1-\varepsilon_0)I_g - (1-\varepsilon_g)I_0 \qquad (g=1,2,\dots,\sigma),$$

die als Functionen von a_0 die *Tissot-Pochhammer*sche Differentialgleichung σ-ter Ordnung (es ist also hier $n=\sigma$)

$$(D_0.) \qquad \sum_{\nu=0}^{\sigma} Q_\nu(a_\nu)\frac{d^\nu y}{da_0^\nu} = 0$$

befriedigen, deren Coefficienten*) rational von $a_0, a_1, \dots, a_\sigma$ abhängen, erfahren

*) wie sie z. B. aus diesem Journal Bd. 116, S. 119 entnommen werden können.

hiernach, wenn a_0 den Schnitt l_g einmal im positiven Sinne durchquert, die Substitution

$$\mathsf{A}_g \qquad \begin{cases} \overset{0g}{y}_\nu = y_\nu - \varepsilon_0(1-\varepsilon_\nu)y_g, & (\nu = 1,2,\ldots,g-1), \\ \overset{0g}{y}_g = \varepsilon_0\varepsilon_g y_g, \\ \overset{0g}{y}_\mu = y_\mu - (1-\varepsilon_\mu)y_g, & (\mu = g+1,\ldots,\sigma). \end{cases}$$

Vollzieht ferner a_λ einen einfachen positiven Umlauf um a_h oder a_h einen solchen um a_λ, $(0<h<\lambda)$, so erfahren die $y_1, y_2, \ldots, y_n$ die Substitution

$$\mathsf{B}_{h\lambda} \qquad \begin{cases} \overset{k\lambda}{y}_\mu = y_\mu, & (\mu = 1,2,\ldots,h-1), \\ \overset{h\lambda}{y}_h = (1-\varepsilon_h)y_\lambda + \varepsilon_\lambda y_h, \\ \overset{h\lambda}{y}_\nu = (1-\varepsilon_\nu)[(1-\varepsilon_h)y_\lambda - (1-\varepsilon_\lambda)y_h] + y_\nu, & (\nu = h+1,\ldots,\lambda-1), \\ \overset{h\lambda}{y}_\lambda = (\varepsilon_\lambda^2 - \varepsilon_\lambda)y_h + (1-\varepsilon_\lambda+\varepsilon_\lambda\varepsilon_h)y_\lambda, \\ \overset{h\lambda}{y}_\mu = y_\mu, & (\mu = \lambda+1,\ldots,\sigma)^*). \end{cases}$$

Wir sehen, dass die $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma, \mathsf{B}_{h\lambda}$ in der That von den

$$a_0, a_1, \ldots, a_\sigma$$

unabhängig sind. Für reale Werthe der $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_\sigma$ sind die Convergenzbedingungen für alle Systeme (6.) Nr. IX erfüllt, auch ist die *Tissot-Pochhammer*sche Differentialgleichung (D_0) nur für ganz specielle Werthe der $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_\sigma$ reductibel. Dass die $\mathsf{B}_{h\lambda}$ in der That die $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\sigma$ in die durch die Formeln (7.) Nr. VII gegebenen

$$\overset{h\lambda}{\mathsf{A}}_1, \ldots, \overset{h\lambda}{\mathsf{A}}_\sigma$$

transformiren, kann durch Rechnung verificirt werden.

Besonders bemerkenswerth ist die Besonderheit, dass $n = \sigma$, und dass die $y_1, \ldots, y_\sigma$ auch als Functionen irgend eines a_λ $(\lambda > 0)$ eine *Tissot-Pochhammer*sche Differentialgleichung, also eine Differentialgleichung der *Fuchs*schen Klasse befriedigen, so dass in diesem Falle die $\sigma+1$ Systeme (9.) Nr. IX sämmtlich mit $y_1, \ldots, y_n$ zusammenfallen.

---

*) Diese Formeln habe ich in der Litteratur nicht vorgefunden.

Die Systeme partieller Differentialgleichungen, mit denen die Herren ***Appell****), ***Picard***), ***Goursat***), ***Le Vavasseur***†), ***Wirtinger***††) sich beschäftigt haben, sind zum Theil als specielle Fälle in der ***Tissot-Pochhammer***schen Differentialgleichung enthalten, sofern sie allgemeinerer Natur sind, lassen sie sich der Theorie der am Schlusse der Nr. IX betrachteten Functionen von $\sigma+1$ Variabeln anreihen.

---

*) *Liouville*s Journal III. Serie, Bd. VIII, S. 173—217.

**) Annales de l'École Normale II. Serie, Bd. 10, S. 305—322; III. Serie, Bd. 2, S. 357—384; Acta Mathematica, Bd. I, S. 297—321, Bd. II, S. 114—132, Bd. V, S. 121 bis 182; Bulletin de la Société Mathém., Bd. XV, S. 148—152; Bulletin des Sciences Mathém., II. Serie, Bd. 9, S. 202.

***) Acta Mathematica Bd. II. S. 1—71; Annales de l'École Normale, II. Serie, Bd. 12, S. 261—287, 395—430.

†) Thèses de la Faculté des Sciences (Paris, 1893).

††) Wiener Sitzungsberichte, Mathem. naturw. Klasse Bd. CVIII, Abth. IIa, Nov. 1899.

Berichtigungen zu der ersten Abhandlung, dieses Journal Bd. 123.

S. 144, Zeile 4 v. o. lies „unendlich“ statt „gleich Null“,
„ „ , „ 5 v. o. „ „$\nu = \infty$“ „ „$\nu = 0$“,
„ 150, „ 8 v. u. „ „Zetaformen“ „ „Zetafunctionen“,
„ 152, Gleichung (3.) muss der letzte Buchstabe lauten: $\left| a_{\varkappa\lambda}^{(\nu\varkappa)} \right|$,
„ 164, Zeile 3 v. u., am Fusse des Σ-zeichens, lies „$\varkappa = 1$“ statt „$\sigma = 1$“,
„ 170, „ 5 v. o. lies „Hauptklasse“ statt „Hauptart“,
„ 173, „ 1 der Fussnote lies „unimodular“ statt „unimodolar“.

GENERAL LIBRARY
UNIV. OF MICH.
JUL 18 1902

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

von

L. Fuchs.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 124.

Heft IV.

Ausgegeben den 28. Juni.

Berlin,
W. 35 Lützowstrasse 107/8.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1902.

Jährlich circa 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 12.—.

Georg Reimer
Verlag

Berlin W. 35,
Lützowstr. 107—8.

Anfang Juni d. J. erschien:

Astronomischer Jahresbericht

mit Unterstützung der

Astronomischen Gesellschaft

herausgegeben von

Walter F. Wislicenus.

Band III enthaltend die Litteratur des Jahres 1901.

Oktav XXXII u. 674 Seiten. — Preis brosch. M. 20.—.

Der „Astronomische Jahresbericht" giebt in kurzen Referaten eine Uebersicht über sämmtliche in den verschiedenen Kultursprachen neu erschienenen Arbeiten auf dem Gebiete der Astronomie und Astrophysik und berücksichtigt auch die auf den Gebieten der Geodäsie und Nautischen Astronomie erscheinenden Publikationen thunlichst weitgehend. Von diesem litterarischen Unternehmen liegen jetzt folgende Bände fertig vor:

I. Band (Litteratur des Jahres 1899) 1768 Referate, XXIII u. 537 Seiten, Preis 17 Mark.
II. Band (Litteratur des Jahres 1900) 2320 Referate, XXVI u. 632 Seiten, Preis 19 Mark.
III. Band (Litteratur des Jahres 1901) 2513 Referate, XXXII u. 674 Seiten, Preis 20 Mark.

Der Inhalt jedes Bandes ist nach den verschiedenen Wissenschaftszweigen in 12 Kapitel mit 75 Paragraphen gegliedert, sodass die auf jedem Gebiet erschienenen Arbeiten sofort aufzufinden sind: ausserdem ist jedem Bande ein ausführliches Namen-Register beigefügt.

Jedem, der auf irgend einem Gebiete der Astronomie, Astrophysik, Geodäsie oder Nautischen Astronomie arbeitet, gewährt die Benutzung des „Astronomischen Jahresberichts" eine sehr grosse Ersparniss an Zeit und Mühe, und Jeder, der ihn nur einmal benutzt hat, wird ihn als unentbehrliches Hülfsmittel immer wieder zu Rathe ziehen.

Soeben gelangte zur Ausgabe:

Kant's gesammelte Schriften

herausgegeben von der

Königl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Band XII. Briefwechsel Band III (1795—1803).

Preis brosch. M. 9.—, in Halbfranz geb. M. 11.—.

Früher erschienen:

Band X. Briefwechsel Band I (1747—1788).

Preis brosch. M. 10.—, in Halbfranz geb. M. 12.—.

Band XI. Briefwechsel Band II (1789—1794).

Preis brosch. M. 10.—, in Halbfranz geb. M. 12.—.

Band 124. Heft IV.

Inhaltsverzeichniss.

Königsberger, L. Die Principien der Mechanik für mehrere unabhängige Variable (Fortsetzung) . . . . . Seite 245

Fuchs, L. Ueber Grenzen, innerhalb deren gewisse bestimmte Integrale vorgeschriebene Vorzeichen behalten . . . . . — 278

Schlesinger, L. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen im Anschlusse an das *Riemann*sche Problem . . . . . — 292

Sendungen von Beiträgen für das Journal erbittet die Redaction **ausschliesslich** unter der Adresse:

An die Redaction des Journals für die reine und angewandte Mathematik, Verlagsbuchhandlung von Georg Reimer. Berlin W. 35, Lützowstrasse 107/8.

Georg Reimer
Verlag

Berlin W. 35,
Lützowstr. 107—8.

Soeben erschienen:

Deutschland und die grosse Politik anno 1901.

Von

Dr. Th. Schiemann, Professor an der Universität Berlin.

Ein stattlicher Band von 450 Seiten Oktav, mit ausführlichem Personen- und Sachregister.

Preis geheftet M. 6.—, elegant gebunden M. 7.—.

Die Uebersichten über die äussere Politik, die hier unter dem Titel „Deutschland und die grosse Politik" gegeben werden, sollen das Interesse vertreten, das wir an den grossen Problemen der Weltpolitik nehmen, und den Willen des Lesers dahin richten, ein kraftvolles Eintreten der Regierung für dieses deutsche Interesse auch ihrerseits zu unterstützen,

Im Frühjahr jedes Jahres soll ein Band in annähernd gleicher Stärke erscheinen, der den Fluss und die Strömungen der hohen Politik des vergangenen Jahres behandelt, sodass die Reihe der Bände ein mit dem neuen Jahrhundert beginnendes geschichtliches Quellenwerk von hervorragender Bedeutung sein wird.

Bei der geistvollen und flüssigen Darstellung wird jeder, der am öffentlichen Leben Interesse nimmt, den Ausführungen des von hoher Warte schauenden Autors mit Genuss und Gewinn folgen.

Die Ermordung Pauls und die Thronbesteigung Nikolaus I.

Neue Materialien

veröffentlicht und eingeleitet von

Dr. Th. Schiemann, Professor an der Universität Berlin.

Russisch und Deutsch in einem Bande.

Oktav 28 Bogen. — Preis geheftet M. 10.—, gebunden M. 11.—.

Es ist keineswegs müssige Neugier, wenn seit nunmehr 100 Jahren immer aufs neue versucht worden ist, die dichten Schleier der Ermordung des Kaisers Paul Petrowitsch zu lüften, mit denen absichtliche Entstellung, Legende und Fama die Zusammenhänge verhüllt haben, um die Verantwortlichkeiten zu verschieben. Es ist vielmehr eine Pflicht historischer Gerechtigkeit, das

authentische Material

zusammenzutragen, um ein abschliessendes Urteil zu ermöglichen. — Was wir bisher wissen, geht mit alleiniger Ausnahme des von Professor Schiemann veröffentlichten Briefes des Generals von Bennigsen an den General von Fock auf abgeleitete Quellen zurück.

In dem vorstehenden Buche sind zum ersten Male

neue Materialien aus direkten Quellen veröffentlicht.